

Olasılık

Örnekler

1. Bir çantada 4 beyaz 8 siyah top vardır. Bir siyah top çekilmesi olasılığı nedir?

Cözüm: Siyah top çekilme olasılığı B olsun. Topların sayısı 12 olduğuna göre $P(B)=8/12=2/3$ 'tür.

2. Bir para üç kez atılsın. En az 1 kez tura gelmesi olasılığını bulunuz.

Cözüm I: "En az bir kez tura gelmesi" olayı A olsun. Bu deney için örnek uzay,

$S=\{TTT, YTT, TYT, TTY, YTY, YTY, TYY, YYY\}$ kümesidir. A olayına uygun 7 uygun örnek noktası vardır. Bu nedenle istenen olasılık $P(A)=7/8$ dir.

Cözüm II: $P(A)+P(A')=1$ olduğundan, A yı düşündüğümüz gibi A'nın tümleyenini de düşünebiliriz. A' ne uygun yalnız bir örnek noktası YYY vardır. Buna göre,

$$P(A)=1-P(A')$$

$$=1-1/8=7/8 \text{ dir.}$$

3. İki zarın bir kez atılışında toplamın 7 ya da 10 gelmesi olasılığı nedir?

Cözüm: Toplamın 7 olması olayı A, toplamın 10 olması olayı B olsun. A olayına uygun örnek noktalar; (1,6), (2,5), (3,4), (4,3), (5,2), (6,1) ve B için (4,6), (5,5), (6,4) tür.

A ve B ayrık olaylar olduğundan,

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

$$= \frac{6}{36} + \frac{3}{36} = \frac{1}{4}$$

bulunur.

4. 52 kartlık standart bir desteden rastgele bir kart çekildiğinde, bu kartın bir birli (As) veya karo olması olasılığı nedir?

Cözüm: "Karo çekilmesi" olayı A, "as çekilmesi" olayı B olsun. Bu örnek uzayda 52 örnek nokta vardır. Bu nedenle; $P(A)=13/52$, $P(B)=4/52$, $P(A \cap B)=1/52$ dir. Böylece

$$P(A \cup B)=P(A)+P(B)-P(A \cap B)$$

$$=13/52+4/52-1/52$$

$$=16/52 \text{ bulunur.}$$

5. 52 oyun kartından oluşan bir desteden tekrar yerine koymadan 8 kart çekilmiştir. 3 as (birli) veya 3 papaz (veya her ikisi) çekilme olasılığını bulunuz.

Cözüm: Aşağıdaki olayları tanımlarız.

$A = \{3 \text{ as çekilmesi}\}$, $B = \{3 \text{ papaz çekilmesi}\}$, $A \cap B = \{3 \text{ as ve 3 papaz çekilmesi}\}$

Çekilen 8 karttan üçünün as olması olasılığı: $\binom{4}{3} \binom{48}{5} / \binom{52}{8}$ dir.

Aynı düşünce ile çekilen 8 karttan üçünün papaz olması olasılığı da aynı olacaktır.

Çekilen 8 karttan üçünün as ve üçünün papaz olma olasılığı: $\binom{4}{3} \binom{4}{3} \binom{44}{2} / \binom{52}{8}$ olur.

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ formülünün uygulanmasıyla istenen olasılık,

$$P(A \cup B) = 2 \cdot \frac{\binom{4}{3} \binom{48}{5}}{\binom{52}{8}} - \frac{\binom{4}{3} \binom{4}{3} \binom{44}{2}}{\binom{52}{8}}$$

olacaktır.

Koşullu Olasılık

6. 52 kartlık bir desteden rastgele bir kart çekilsin. “Kart bir maçadır” A olayı olsun. B “kart siyah renklidir” olayını gösterebiliriz. B verilmişken A'nın gerçekleşme olasılığını bulunuz.

Cözüm: Aşağıdaki olasılıklar hakkında konuşabiliriz.

1. $P(A) =$ Kartın maça olma olasılığı = 13/52

2. $P(B) =$ Kartın siyah renkli olması olasılığı = 26/52

3. $P(A \cap B) =$ Çekilen kartın siyah ve maça olması olasılığı = 13/52

4. $P(A/B) =$ Siyah olduğu bilindiğinde maça gelmesi olasılığı = 13/26

Bu olasılıkların bilinmesi ile görülür ki

$$\frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{13/52}{26/52} = 13/26$$

$P(A/B)$ ile aynıdır. $P(A/B)$ ye B verilmişken A'nın koşullu olasılığı denir.

$P(A) = 1/4$ ve $P(A/B) = 1/2$ dir. Bu örnekte B'nin elde edildiği ek bilgisi bilindiğinde A olayının olasılığı artmaktadır.

7. Bir fabrikada üretilen parçalardan kusursuz 40 tanesi ve kusurlu 8 tanesi bir depoya konuyor. Çekilen yine yerine koyulmaksızın sırayla rastgele iki parça seçildiğinde her iki parçanın da kusurlu olması olasılığı nedir?

Çözüm: A ve B olayları aşağıdaki gibi tanımlansın.

A: İlk seçilen parça kusurludur.

B: İkinci parça kusurludur.

O halde;

$$P(A) = \frac{8}{48} = \frac{1}{6} \text{ ve } P(B/A) = \frac{7}{47}$$

öte yandan,

$$\begin{aligned} P(A \cap B) &= P(A) \cdot P(B/A) \\ &= \frac{1}{6} \cdot \frac{7}{47} = \frac{7}{282} \end{aligned}$$

Koşullu olasılık için çarpım teoremi

8. 52lik bir desteden yerine koymaksızın 3 kart çekiliyor. Bu üç kartın as olması olasılığı nedir?

Çözüm: Aşağıdaki olayları tanımlayalım.

A1: İlk kart bir astır.

A2: İkinci kart bir astır.

A3: Üçüncü kart bir astır.

O halde $P(A1)=4/52$, $P(A2/A1)=3/51$ ve $(A3/A1 \cap A2)=2/50$ dir.

Koşullu olasılık için çarpım teoremine göre $A1 \cap A2 \cap A3$ olayının olasılığı; ilk çekilişte bir as bulma olasılığı; ilk çekilişte as bulunduğu verilmişken ikinci çekilişte as bulunması olasılığı; birinci ve ikinci çekilişlerde as bulunduğu verilmişken üçüncü çekilişte as bulunması olasılığının çarpımlarına eşittir.

$$\begin{aligned} P(A1 \cap A2 \cap A3) &= P(A1) \cdot P(A2/A1) \cdot P(A3/A1 \cap A2) \\ &= (4/52) \cdot (3/51) \cdot (2/50) \\ &= 24/132600 \end{aligned}$$

Toplam olasılık formülü

9. Belli bir parça 3 fabrikada üretilmektedir. 1 no lu fabrikada hem 2 hem de 3 no lu fabrikalarda üretimin 2 katı kadar parça üretildiği bilinmektedir. Yine bilinir ki 1 ve 2 no lu fabrikalardaki üretimin 0.02'si, 3 no lu fabrikalardaki üretimin 0.04'ü kusurludur. Üretilen parçaların tümü bir depoya konuyor, sonra rastgele bir parça seçiliyor. Bu parçanın kusurlu bir parça olması olasılığı nedir?

Çözüm: Aşağıdaki olayları tanımlayalım.

$A = \{\text{Parça kusurludur}\}$

$B_1 = \{\text{Parça 1 no lu fabrikadan alındı}\}$

$B_2 = \{\text{Parça 2 no lu fabrikadan alındı}\}$

$B_3 = \{\text{Parça 3 no lu fabrikadan alındı}\}$

$P(A)$ olasılığını bulmak istiyoruz. O halde,

$$P(A) = P(B_1) \cdot P(A/B_1) + P(B_2) \cdot P(A/B_2) + P(B_3) \cdot P(A/B_3)$$

Burada $P(B_1) = 1/2$, $P(B_2) = P(B_3) = 1/4$. Ayrıca $P(A/B_1) = 0.02$, $P(A/B_2) = 0.02$, $P(A/B_3) = 0.04$ olur. Bu değerleri formülde yerine koyarsak

$P(A) = 0.025$ buluruz.

Bayes Teoremi

10. Civata üretilen bir fabrikada toplam üretimin %30'u A, %30'u B, %40'ı C makineleri tarafından yapılmaktadır. Bu makinelerin sırasıyla üretimlerinin %1'i, %3'ü ve %2'si kusurlu civatalardır. Bir günlük üretim sonunda bir civata seçiliyor ve kusurlu olduğu görülüyor. Bu civatanın A makinesi, B makinesi, C makinesinde üretilmiş olması olasılığı nedir?

Çözüm: Aşağıdaki olayları tanımlayalım.

E: Kusurlu civata

A: Civata A makinesinde yapıldı.

B: Civata B makinesinde yapıldı.

C: Civata C makinesinde yapıldı.

O halde,

$$P(A) = 0.30, P(E/A) = 0.01,$$

$$P(B) = 0.30, P(E/B) = 0.03,$$

$$P(C) = 0.40, P(E/C) = 0.02 \text{ dir.}$$

$$P(A \cap E) = P(A) \cdot P(E/A) = (0.30) \cdot (0.01) = 0.003$$

$$P(B \cap E) = P(B) \cdot P(E/B) = (0.30) \cdot (0.03) = 0.009$$

$$P(C \cap E) = P(C) \cdot P(E/C) = (0.40) \cdot (0.02) = 0.008 \text{ olur.}$$

Bayes teoremini kullanarak $P(A/E)$ olasılığı aşağıdaki gibi bulunur.

$$\begin{aligned} P(A/E) &= \frac{P(A \cap E)}{P(A \cap E) + P(B \cap E) + P(C \cap E)} \\ &= \frac{0.003}{0.003 + 0.009 + 0.008} = \frac{3}{20} \end{aligned}$$

Benzer şekilde

$$P(B/E) = \frac{0.009}{0.020} = \frac{9}{20}$$

$$P(C/E) = \frac{0.008}{0.020} = \frac{8}{20}$$

elde edilir.

11. İki kutu K1 ve K2 olarak isimlendirilmiştir. K1'de 1 beyaz, 2 siyah top var; K2'de 2 beyaz, 3 siyah top vardır. I. Kutudan bir top çekiliyor ve II.ye atılıyor. II. Kutudan çekilen top siyah olduğuna göre I. Kutudan çekilen topun beyaz olması olasılığı nedir?

Cözüm: Aşağıdaki olaylar tanımlanabilir.

B_1 =K1'den beyaz top çekilmesi olayı

B_2 =K1'den siyah top çekilmesi olayı

A =K2'den siyah top çekilmesi olayı

O halde Bayes teoreminden,

$$P(B_1/A) = \frac{P(B_1)P(A/B_1)}{P(B_1)P(A/B_1) + P(B_2)P(A/B_2)}$$

$$P(B_1) = \frac{1}{3}, P(B_2) = \frac{2}{3}$$

$$P(A/B_1) = \frac{1}{2}, P(A/B_2) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

$$P(B_1/A) = \frac{\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2}}{\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} + \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3}} = \frac{3}{11}$$

bulunur.