13. Ders

Merkezi Limit Teoremleri

Büyük sayılar kanunları rasgele değişkenlerin (X_n) dizisinde

$$S_n = X_1 + X_2 + \ldots + X_n$$

kısmi toplamlarına dayalı,

$$\overline{X}_n = S_n/n$$

ortalamalarının $(\overline{X}_n)$ dizisi için,

$$\overline{X}_n \xrightarrow{p} E(X_1)$$

yakınsamasını ifade etmektedir.

$$Y_n = \frac{S_n - E(S_n)}{\sqrt{Var(S_n)}}$$

olmak üzere, Merkezi limit teoremleri, (Y_n) dizisinin dağılımda yakınsaması ile ilgilidir. Bazı (X_n) dizileri için (Y_n) dizileri dağılımda, dağılım fonksiyonu,

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2n}} e^{-x^2/2}\, dx$$

olan dağılıma yakınsamaktadır. Bu dağılımın olasılık yoğunluk fonksiyonu,

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2n}} e^{-x^2/2} \ , \ -\infty < x < \infty$$

karakteristik fonksiyonu,

$$\Phi_X(t) = e^{-t^2/2} \ , \ t \in \mathbf{R}$$

beklenen değeri 0, varyansı 1 olmak üzere, kendisine standart normal dağılım denir ve $N(0,1)$ biçiminde gösterilir. Bu kısımda $N(0,1)$ dağılımına sahip rasgele değişken Z harfi ile gösterilecektir. Buna göre, $\mu \in \mathbf{R}$, $\sigma^2 \in (0,\infty)$ için $X = \sigma Z + \mu$ rasgele değişkeninin beklenen değeri $E(X) = \mu$, varyansı $Var(X) = \sigma^2$ olmak üzere, olasılık yoğunluk fonksiyonu,

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2n}\,\sigma} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} \ , \ -\infty < x < \infty$$

ve karakteristik fonksiyonu,

$$\mu_X(t) = e^{i\mu t - \frac{\sigma^2 t^2}{2}} \ , \ t \in \mathbf{R}$$

dır. Bu dağılıma μ ortalamalı ve σ^2 varyanslı normal dağılım denir ve $N(\mu,\sigma^2)$ ile gösterilir. Bu kitapta ilk defa belli bir dağılımın ismi zikredilmiş oldu. Kitabın başlıca amacı olasılık ve istatistik ile ilk kez karşılaşanlar için temel kavramları, özellikle rasgele değişken kavramını tanıtmak olduğundan, dağılımların tanımlamaları ve isimlendirilmeleri yapılmadı. Merkezi limit teoreminde karşımıza çıkan $N(0,1)$ dağılımı, başka yollardan da karşımıza çıkabilir. Örneğin sıfır ortalamalı ve bir varyanslı dağılımlar arasında en küçük entropiye sahip dağılım $N(0,1)$ dir. $N(0,1)$ dağılımı ilk olarak DeMoivre, Laplace ve Gauss tarafından fark edilmiştir.

Teorem: (Lindeberg-Levy Teoremi) (X_n) dizisi sıfır ortalamalı, bir varyanslı bağımsız ve aynı dağılımlı rasgele değişkenlerin bir dizisi ise,

$$\frac{S_n}{\sqrt{n}} \xrightarrow{d} Z$$

dır.

İspat: $S_n = Y_1 + Y_2 + \ldots + Y_n$ olmak üzere,

$$\Phi_{S_n}(t) = [\Phi_{X_1}(t)]^n \qquad , t \in \mathbb{R}$$

ve

$$\Phi_{S_n/\sqrt{n}}(t) = \Phi_{S_n}\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right) = \left[\Phi_{X_1}\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)\right]^n$$

yazılabilir.

$$\Phi_{X_1}\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right) = 1 + \frac{iE(X_1)}{1!}\frac{t}{\sqrt{n}} + \frac{i^2E(X^2)}{2!}\frac{t^2}{n} + \frac{i^3E(X^3)}{3!}\frac{t^3}{n^{\frac{3}{2}}} + \ldots$$

$$= 1 - \frac{1}{2n}t^2 - \frac{iE(X^3)}{3!}\frac{t^3}{n^{\frac{3}{2}}} + \ldots$$

olmak üzere,

$$\Phi_{S_n/\sqrt{n}}(t) = \left[1 - \frac{1}{2n}t^2 - \frac{iE(X^3)}{3!}\frac{t^3}{n^{\frac{3}{2}}} + \ldots\right]^n$$

ve

$$\lim_{n\to\infty}\left(1 - \frac{1}{2n}t^2 - \frac{iE(X^3)}{3!}\frac{t^3}{n^{\frac{3}{2}}} + \ldots\right)^n = e^{-\frac{t^2}{2}}$$

yani,

$$\lim_{n\to\infty}\Phi_{S_n/\sqrt{n}}(t) = \Phi_Z(t)$$

olduğundan,

$$\frac{S_n}{\sqrt{n}} \xrightarrow{d} Z$$

olup, teorem ispatlanmıştır.

$$S_n = n\overline{X}_n$$

olmak üzere,

$$\sqrt{n}\,\overline{X}_n \xrightarrow{d} Z$$

dır.

Bağımsız ve aynı dağılımlı rasgele değişkenlerin (V_n) dizisi için $E(V_n) = \mu$, $Var(V_n) = \sigma^2 < \infty$, $n = 1,2,\ldots$ olduğunda,

$$X_n = \frac{V_n - \mu}{\sigma} \quad , \; n = 1,2,\ldots$$

$$\overline{X}_n = \frac{\overline{V}_n - \mu}{\sigma} \quad , \; n = 1,2,\ldots$$

ve

$$\sqrt{n}\;\overline{X}_n \xrightarrow{d} Z$$

olmak üzere,

$$\frac{\overline{V}_n - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \xrightarrow{d} Z$$

dır.

Özetlersek, ikinci momentleri mevcut bağımsız ve aynı dağılımlı rasgele değişkenlerin (X_n) dizisi için,

$$\frac{\overline{X}_n - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \xrightarrow{d} Z$$

yani,

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\frac{\overline{X}_n - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \leq t \right) = P(Z \leq t)$$

$$= \int_{-\infty}^{t} \frac{1}{\sqrt{2n}} e^{-z^2/2} dz$$

dır. DeMoivre-Laplace teoremi bu sonuçtan elde edilebilir.

$X_n,\, n = 1,2,\ldots$ rasgele değişkenlerinin karakteristik fonksiyonu için $\int_{-\infty}^{\infty} |\Phi_{X_1}(t)| < \infty$ özelliği de sağlanıyorsa $S_n/\sqrt{n}$ rasgele değişkenlerin olasılık(yoğunluk) fonksiyonlarının değerleri de standart normal dağılımın olasılık yoğunluk fonksiyonunun değerlerine yakınsadığı, yani

$$f_{S_n/\sqrt{n}}(x) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$$

olduğu ispatlanabilir.

Teorem: (**Liapunov Teoremi**) (X_n) dizisi, bağımsız rasgele değişkenlerin, $E(Y_i) = \mu_i$, $Var(X_i) = \sigma_i^2,\; \beta_i = E|X_i - \mu_i|^2 < \infty,\; i = 1,2,\ldots$ ve

$$\frac{\left(\sum_{i=1}^{n} \beta_i\right)^{1/3}}{\left(\sum_{i=1}^{n} \sigma_i^2\right)^{1/2}} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

olan bir dizi ise,

$$\frac{S_n - E(S_n)}{\sqrt{Var(S_n)}} \xrightarrow{d} Z$$

dır.

Teorem:(**Lindeberg**-**Feller Teoremi**) (X_n) bağımsız rasgele değiş-kenlerin bir dizisi olmak üzere, her $\varepsilon > 0$ için,

$$\max_{1 \le i \le n} \frac{i}{\sqrt{VarS_n}} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0 \text{ ve } \frac{S_n - E(S_n)}{\sqrt{Var(S_n)}} \overset{d}{\longrightarrow} Z$$

olması için gerek ve yeter şart

$$\frac{1}{Var(S_n)} \sum_{i=1}^{n} \left(\int_{|x-\mu_i| > \varepsilon Var(S_n)} (x-\mu_i)^2 dF_{X_n}(x) \right) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

olmasıdır. (Buradaki integral bir Riemann-Stieltjes integralidir.)

Teorem:(X_n) bağımsız ve aynı dağılımlı, $E(X_n) = \mu$, $Var(X_n) = \sigma^2 < \infty,\ n = 1,2,\ldots$ olan rasgele değişkenlerin bir dizisi, (V_n) tam sayı değerler alan rasgele değişkenlerin bir dizisi, öyleki (a_n) pozitif sayıların,

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$$

olan bir dizisi olmak üzere, c $(c < \infty)$ pozitif sabiti için,

$$\frac{V_n}{a_n} \overset{P}{\longrightarrow} c$$

olsun. O zaman,

$$\frac{\sum_{i=1}^{V_n} (X_i - \mu)}{\sigma\sqrt{V_n}} \overset{d}{\longrightarrow} Z$$

dir.

Teorem: $n = 1,2,\ldots$ için $E(X_n) = 0$, $Var(X_n) = 1$ olmak üzere, (X_n) bağımsız ve aynı dağılımlı rasgele değişkenlerin bir dizisi olsun. Bu dağılımın $\Phi(t)$ karakteristik fonksiyonu mutlak integrallenebilir, yani

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\Phi(t)| dt < \infty$$

ise, $(\sqrt{n}\,\overline{X}_n)$ dizisindeki $\sqrt{n}\,\overline{X}_n$ rasgele değişkenlerin olasılık (yoğunluk) fonksiyonlarının dizisi düzgün olarak standart normal dağılımın olasılık yoğunluk fonksiyonuna yakınsar, yani düzgün olarak,

$$\lim_{n\to\infty} f_{\sqrt{n}\,\overline{X}}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2} \ , \ x \in \mathbf{R}$$

dır.

Yukarıdaki teoremlerin ispatları kitaplarda bulunabilir.

(X_n) bağımsız ve aynı dağılımlı $\left(E(X_i) = \mu, Var(X_i) = \sigma^2 < \infty \ , \ i = 1,2,\ldots\right)$ olan rasgele değişkenlerin bir dizisi olduğunda,

$$Y_n = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i - E\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right)}{\sqrt{Var\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right)}} \xrightarrow{d} Z$$

yani,

$$\lim_{n\to\infty} P(Y_n \le t) = P(Z \le t) \ , \ t \in \mathbf{R}$$

Büyük n 'ler için,

$$P\left(\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i - E\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right)}{\sqrt{Var\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right)}} \le t \right) \simeq P(Z \le t)$$

$$P\left(\frac{\overline{X}_n - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \le t \right) \le t) \simeq P(Z \le t)$$

dır.

Örnek: $X_1, X_2, \ldots X_n, \ldots$ dizisindeki rasgele değişkenler bağımsız ve herbiri, olasılık yoğunluk fonksiyonu,

$$f(x) = \begin{cases} 1 \ , & 0 < x < 1 \\ 0 \ , & d.y. \end{cases}$$

olan dağılıma sahip olsun. Bu dağılımın beklenen değeri $1/2$ ve varyansı $1/12$ olmak üzere,

$$\sqrt{12n}\,(\overline{X}_n - 1/2) \xrightarrow{d} Z$$

ve büyük n ler için,

$$P\left(\sqrt{12n}\,(\overline{X}_n - 1/2) \le t\right) \approx P(Z \le t) \ , \ t \in \mathbf{R}$$

dır. Örneğin $(0,1)$ aralığındaki reel sayılardan "rasgele 27 tane sayı çekilirse" bunların ortalamasının 0.45 ile 0.55 arasında olması olasılığı yaklaşık olarak,

$$P(0,45 < \overline{X}_{27} < 0,55) = P(\overline{X}_{27} < 0,55) - P(\overline{X} < 0,45)$$

$$\begin{aligned} &= P\left(\sqrt{12 \times 27}\,(\overline{X}_{27} - 0,5) < \sqrt{12 \times 27}\,(0.55 - 0.5)\right) \\ &\quad - P\left(\sqrt{12 \times 27}\,(\overline{X}_{27} - 0,5) < \sqrt{12 \times 27}\,(0.45 - 0.5)\right) \\ &\approx P(Z < 1.8) - P(Z < -1.8) = 0.722 \end{aligned}$$

dır.

Örnek:Düzgün bir paranın ardarda atılması deneyinde X, bir atışta gelen tura sayısı olmak üzere,

$$f_X(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x \left(\frac{1}{2}\right)^{1-x}, \ x = 0, 1$$

ve $\sum_{i=1}^{n} X_i$, n atışta gelen tura sayısı olmak üzere,

$$P\left(\sum_{i=1}^{n} X_i = x\right) = \binom{n}{x}\left(\frac{1}{2}\right)^n, \ x = 0, 1, 2, \ldots, n$$

dır. $\overline{X}_n = \sum_{i=1}^{n} X_i/n$ rasgele değişkeninin aldığı değerler,

$$\overline{x}_n = 0, 1/n, 2/n, \ldots, 1$$

olmak üzere, bu değerleri alması olasılığı,

$$P\left(\overline{X}_n = \frac{k}{n}\right) = \binom{n}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^n, \ k = 0, 1, 2, \ldots, n$$

dır. Merkezi limit teoreminden,

$$2\sqrt{n}\,(\overline{X}_n - 1/2) \xrightarrow{d} Z$$

$$\frac{2}{\sqrt{n}}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i - n/2\right) \xrightarrow{d} Z$$

ve büyük n ler için,

$$P\left(\frac{2}{\sqrt{n}}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i - n/2\right) \leq t\right) \approx P(Z \leq t)$$

$$P\left(\sum_{i=1}^{n} X_i \leq \frac{\sqrt{n}\,t}{2} + \frac{n}{2}\right) \approx P(Z \leq t)$$

dır. Buna göre 100 atışta gelen tura sayısının 56 dan az olması olasılığı için,

$$P\left(\sum_{i=1}^{n} X_i \leq 55\right) \approx P(Z \leq 1) = 0.8413$$

dır.

Problemler

1. (X_n) bağımsız ve aynı dağılımlı $\left(\mu\right.$ ortalamalı ve $\sigma^2 < \infty$ varyanslı$\left.\right)$ rasgele değişkenlerin bir dizisi olmak üzere,

$$S_{n-1}^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} (X_i - \overline{X}_n)^2}{n-1} \xrightarrow{P} \sigma^2$$

ve

$$\frac{\overline{X}_n - \mu}{S_{n-1}/\sqrt{n}} = \frac{\sqrt{n}\,(\overline{X}_n - \mu)}{\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} (X_i - \overline{X}_n)^2}{n-1}}} \xrightarrow{d} Z$$

olduğunu gösteriniz.

2.

a) Düzgün bir zar 100 defa atıldığında en az 20 kez 6 gelmesi olasılığı nedir?

b) Düzgün bir zar 100 defa atıldığında gelen sayıların toplamının 360 dan büyük olması olasılığı nedir?

8. Belli bir tür elektronik parça için yıl olarak dayanma süresinin (X) olasılık yoğunluk fonksiyonu,

$$f(x) = \begin{cases} e^{-x} & , \quad x > 0 \\ 0 & , \quad d.y. \end{cases}$$

olduğu bilinmektedir.

a) Böyle 100 parçanın toplam dayanma süresinin en az 110 yıl olması olasılığı nedir?

b) Böyle 100 parçadan en az 50 tanesinin dayanma süresinin 1 yıldan fazla olması olasılığı nedir?