6. Ders

BEKLENEN DEĞER

Tanım: X, bir rasgele değişken ve $g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $\forall B \in \mathfrak{B}(\mathbf{R})$ için $\{x : g(x) \in B\} \in \mathfrak{B}(\mathbf{R})$ özelliğine sahip bir fonksiyon olmak üzere:

i) X kesikli ve $\sum_x |g(x)|f(x) < \infty$ olduğunda,

$$E(g(X)) = \sum_x g(x)f(x)$$

ii) X sürekli ve $\int_{-\infty}^{\infty} |g(x)|f(x)dx < \infty$ olduğunda,

$$E(g(X)) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x)f(x)dx$$

değerine $g(X)$ in beklenen değeri denir.

Örnek: X rasgele değişkenin olasılık fonksiyonu,

$$f(x) = \frac{1}{2^x}, \quad x = 1, 2, \ldots$$

ve

$$g(x) = (-1)^{x+1}\frac{2^x}{x}$$

olmak üzere, $g(X)$ in beklenen değerini araştıralım.

$$\sum_x |g(x)|f(x) = \sum_{x=1}^{\infty} \left|(-1)^{x+1}\frac{2^x}{x}\right| \frac{1}{2^x}$$

$$= \sum_{x=1}^{\infty} \frac{1}{x} = \infty$$

olduğundan, Tanım 4.1.1 deki $\sum_x |g(x)|f(x) < \infty$ olma şartı sağlanmamaktadır. Bu sebeple, gerçekte var olan,

$$\sum_x g(x)f(x) = \sum_{x=1}^{\infty} (-1)^{x+1}\frac{2^x}{x}\frac{1}{2^x} = \sum_{x=1}^{\infty} \frac{(-1)^{x+1}}{x}$$

sayısına $g(X)$ in beklenen değeri diyemeyiz. Böyle durumlarda $g(X)$ in beklenen değeri yoktur denir. Bundan sonraki kısımlarda $E(g(X))$ değeri sözkonusu olduğunda aksi belirtilmedikçe $g(X)$ in beklenen değerinin var olduğunu kabul edeceğiz.

Tanım: X bir rasgele değişken, $c \in \mathbf{R}$ ve k bir doğal sayı olmak üzere:

a) $E\left[(X-c)^k\right]$ değerine X in c ye göre k inci momenti,

b) $E(X^k)$ değerine X in k inci momenti,

c) $E(X)$ değerine X in beklenen değeri,

d) $E\left[(X-EX)^2\right]$ değerine X in varyansı,

e) $E[X(X-1)(X-2)\cdots(X-k+1)]$ değerine X in k inci çarpımsal momenti denir.

Alışagelmiş olarak bir X rasgele değişkenin beklenen değeri μ_X veya sadece μ, varyansı ise $Var(X)$, σ_X^2 veya sadece σ^2 ile de gösterilmektedir. Varyansın kareköküne standart sapma denir ve bir X rasgele değişkenin standart sapması σ_X veya sadece σ ile gösterilir.

Örnek: X rasgele değişkenin olasılık yoğunluk fonksiyonu,

$$f(x) = \begin{cases} 3x^{-4} & , \quad x > 1 \\ 0 & , \quad d.y. \end{cases}$$

olsun. X in beklenen değeri,

$$E(X) = \int_1^\infty x \times 3x^{-4}dx = 3\frac{x^{-2}}{-2}\Big|_1^\infty = \frac{3}{2}$$

ve varyansı,

$$Var(X) = \int_1^\infty \left(x-\frac{3}{2}\right)^2 \times 3x^{-4}dx = \left(-3x^{-1}+\frac{9}{2}x^{-2}-\frac{9}{4}x^{-3}\right)\Big|_{x=1}^\infty = \frac{3}{4}$$

olarak bulunur.

$\alpha \geq 3$ için $\int_1^\infty x^\alpha 3x^{-4}dx$ integrali ıraksak olduğundan X rasgele değişkenin 3 ve 3 den büyük olan momentleri yoktur.

Teorem: $g_i : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $i = 1,2,\ldots,n$, $\forall B \in \mathfrak{B}(\mathbf{R})$ için $\{x : g_i(x) \in B\} \in \mathfrak{B}(\mathbf{R})$ olmak üzere, $E(g_i(X))$, $i = 1,2,\ldots,n$ beklenen değerleri varsa, $\sum_{i=1}^n g_i(X)$ in beklenen değeri vardır ve

a) $E\left(\sum_{i=1}^n g_i(X)\right) = \sum_{i=1}^n E(g_i(X))$

b) $a, b \in \mathbf{R}$ olmak üzere,

$$E(aX+b) = aE(X)+b, \quad Var(aX+b) = a^2 Var(X)$$

c) $m_k = E(X^k),\ \mu_k = E(X-\mu)^k,\ k = 1,2,\ldots$ olmak üzere,

$$\mu_k = \sum_{i=0}^{k} (-1)^i \binom{k}{i} m_{k-i}\mu^k$$

$$m_k = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} \mu_{k-i}\mu^k$$

ve özel olarak,

$$Var(X) = \mu_2 = m_2 - \mu^2 = E(X^2) - (EX)^2$$

dır.

İspat:(Ödev)

Teorem: $0 < h < t$ olmak üzere $|X|^t$ nin beklenen değeri varsa $|X|^h$ nin de beklenen değeri vardır.

İspat: İspatı X in sürekli olması hali için verelim.

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x|^h f(x)dx = \int_{|x|^h \leq 1} |x|^h f(x)dx + \int_{|x|^h > 1} |x|^h f(x)dx$$

$$\leq \int_{|x|^h \leq 1} f(x)dx + \int_{|x|^h > 1} |x|^t f(x)dx$$

$$\leq P(|X|^h \leq 1) + E|X|^t < \infty$$

X in kesikli olması durumunda ispat yukarıdakine benzer yolda yapılabilir.

Teorem: Negatif değerler almayan bir X rasgele değişkenin dağılım fonksiyonu F olsun. Eğer X in beklenen değeri varsa

$$E(X) = \int_0^{\infty} (1 - F(x))dx$$

dir. Eşitliğin sağ tarafındaki integralin yakınsak olması halinde X in beklenen değeri vardır.

İspat: İlk önce X in sürekli rasgele değişken olması durumunu ele alalım. X negatif değerler almayan, dağılım fonksiyonu F, olasılık yoğunluk fonksiyonu f ve beklenen değeri var $(E|X| = E(X) < \infty)$ olan bir rasgele değişken olsun. O zaman,

$$E(X) = \int_0^\infty xf(x)dx = \lim_{n\to\infty}\int_0^n xf(x)dx$$

ve

$$\lim_{n\to\infty}\int_n^\infty xf(x)dx = 0$$

dır. Kısmi integrasyon sonucu

$$\int_0^n xf(x)dx = nF(n) - \int_0^n F(x)dx = -n(1 - F(n)) + \int_0^n (1 - F(x))dx$$

elde edilir. Diğer taraftan,

$$0 \le n(1 - F(n)) = n\int_n^\infty f(x)dx < \int_n^\infty xf(x)dx$$

olması sebebiyle,

$$\lim_{n\to\infty} n(1 - F(n)) = 0$$

dır. Böylece,

$$E(X) = \lim_{n\to\infty}\int_0^n xf(x)dx = \lim_{n\to\infty}\int_0^n (1 - F(x))dx$$
$$= \int_0^\infty (1 - F(x))dx$$

elde edilir. Teoremin geri kalan kısmını ispatlamak için,

$$\int_0^\infty (1 - F(x))dx < \infty$$

olduğunu varsayalım. O zaman,

$$\int_0^n xf(x)dx \le \int_0^n (1 - F(x))dx \le \int_0^\infty (1 - F(x))dx < \infty$$

ve böylece,

$$E|X| = \lim_{n\to\infty}\int_0^n |x|f(x)dx = \lim_{n\to\infty}\int_0^n xf(x)dx < \infty$$

dır.

Şimdi X rasgele değişkenin kesikli olması durumunu ele alalım. X rasgele değişkenin olasılık fonksiyonu f olmak üzere

$$E(X) = \sum_{j=1}^\infty x_j f(x_j) < \infty$$

olsun. Her n pozitif tamsayısı için,

$$\int_0^{\infty} (1 - F(x))dx = \sum_{k=1}^{\infty} \int_{(k-1)/n}^{k/n} P(X > x)dx$$

ve $P(X > x)$, x e göre artmayan olduğundan,

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{\infty} P\left(X > \frac{k}{n}\right) \leq \int_0^{\infty} (1 - F(x))dx \leq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{\infty} P\left(X > \frac{k-1}{n}\right)$$

yazılabilir.

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{\infty} P\left(X > \frac{k}{n}\right) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{j=k}^{\infty} P\left(\frac{j}{n} < X \leq \frac{j+1}{k}\right)$$

$$= \frac{1}{n} \sum_{k=2}^{\infty} (k-1)P\left(\frac{k-1}{n} < X \leq \frac{k}{n}\right)$$

$$= \sum_{k=2}^{\infty} \frac{k}{n} P\left(\frac{k-1}{n} < X \leq \frac{k}{n}\right) - \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{n} P\left(\frac{k-1}{n} < X \leq \frac{k}{n}\right)$$

$$= \sum_{k=2}^{\infty} \frac{k}{n} \sum_{\frac{k-1}{n} < x_j \leq \frac{k}{n}} f(x_j) - \frac{1}{n} P\left(X > \frac{1}{n}\right)$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{n} \sum_{\frac{k-1}{n} < x_j \leq \frac{k}{n}} f(x_j) - \frac{1}{n}\left[\sum_{0 < x_j \leq \frac{1}{n}} f(x_j) + P\left(X > \frac{1}{n}\right)\right]$$

$$\geq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{n} \sum_{\frac{k-1}{n} < x_j \leq \frac{k}{n}} x_j f(x_j) - \frac{1}{n}$$

$$= E(X) - \frac{1}{n}$$

ve benzer yoldan,

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{\infty} P\left(X > \frac{k-1}{n}\right) \leq E(X) + \frac{1}{n}$$

olduğu gösterilebilir. Buradan

$$E(X) - \frac{1}{n} \leq \int_0^{\infty} (1 - F(x))dx \leq E(X) + \frac{1}{n}$$

yazılabilir. $n \to \infty$ için limit alındığında $E(X) = \int_0^{\infty} (1 - F(x))dx$ elde edilir.■

Teorem: Bir X rasgele değişkenin beklenen değerinin var olması için gerek ve yeter şart $\int_{-\infty}^{0} P(X \leq x)dx$ ve $\int_{0}^{\infty} P(X > x)dx$ integrallerinin her ikisinin de yakınsak olmasıdır. Bu durumda

$$E(X) = \int_{0}^{\infty} P(X > x)dx - \int_{-\infty}^{0} P(X \leq x)dx$$

dır.

İspat: (Ödev)

Örnek: X rasgele değişkenin olasılık yoğunluk fonksiyonu,

$$f(x) = \begin{cases} e^{-x-3} & , \quad x > -3 \\ 0 & , \quad d.y. \end{cases}$$

olsun. X in beklenen değeri vardır ve,

$$E(X) = \int_{-3}^{\infty} xe^{-x-3}dx$$

$$= -xe^{-x-3} \Big|_{-3}^{\infty} + \int_{-3}^{\infty} e^{-x-3}dx$$

$$= -\lim_{x\to\infty} \frac{x}{e^{x+3}} - 3 + \frac{e^{-x-3}}{-1} \Big|_{-3}^{\infty} = -2$$

dır. Şimdi X in beklenen değerini Teorem 4.1.4 deki yoldan hesaplayalım.

$$F(x) = P(X \leq x) = \begin{cases} 0 & , \quad x < -3 \\ 1 - e^{-x-3} & , \quad x \geq -3 \end{cases}$$

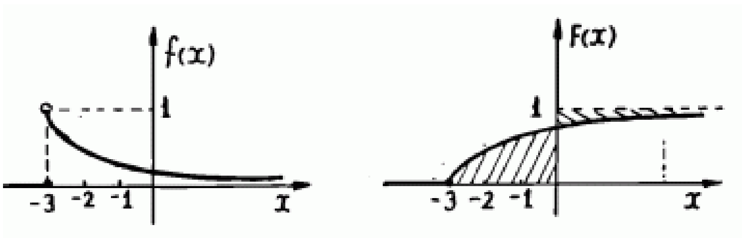
olmak üzere,

$$E(X) = \int_0^{\infty} P(X > x)dx - \int_{-\infty}^{0} P(X \leq x)dx$$

$$= \int_0^{\infty} (1 - F(x))dx - \int_{-\infty}^{0} F(x)dx$$

$$= \int_0^{\infty} e^{-x-3}dx - \int_{-\infty}^{-3} 0dx - \int_{-3}^{0} (1 - e^{-x-3})dx = -2$$

elde edilir.



Örnek: X rasgele değişkenin olasılık fonksiyonu

$$f(x) = 1/6, \quad x = -2, -1, 0, 1, 2, 3$$

olsun.

$$E(X) = \sum_{x=-2}^{3} xf(x) = 1/2$$

olmak üzere, bu değeri Teoremdeki yoldan hesaplayalım.

$$F(x) = \begin{cases} 0 & , \quad x < -2 \\ 1/6 & , \quad -2 \leq x < -1 \\ 2/6 & , \quad -1 \leq x < 0 \\ 3/6 & , \quad 0 \leq x < 1 \\ 4/6 & , \quad 1 \leq x < 2 \\ 5/6 & , \quad 2 \leq x < 3 \\ 1 & , \quad x \geq 3 \end{cases}$$

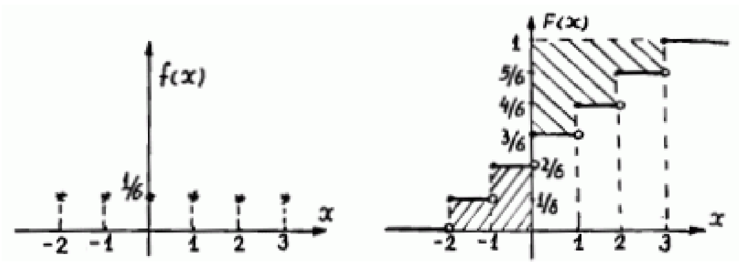
olmak üzere,

$$E(X) = \int_0^{\infty} (1 - F(x))dx - \int_{-\infty}^{0} F(x)dx$$

$$= \int_0^1 (1 - 3/6)dx + \int_1^2 (1 - 4/6)dx + \int_2^3 (1 - 5/6)dx +$$

$$+ \int_3^{\infty} 0dx - \int_{-\infty}^{-2} 0dx - \int_{-2}^{-1} 1/6dx - \int_{-1}^{0} 2/6dx = \frac{1}{2}$$

elde edilir.



Örnek : X rasgele değişkenin olasılık yoğunluk fonksiyonu,

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}, \quad -\infty < x < \infty$$

olsun. $n = 1, 2, \ldots$ için $E(X^n)$ değerlerini hesaplayalım.

$$E(X^n) = \int_{-\infty}^{\infty} x^n \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[\int_{-\infty}^{0} x^n e^{-\frac{x^2}{2}} dx + \int_{0}^{\infty} x^n e^{-\frac{x^2}{2}} dx \right]$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[\int_{0}^{\infty} (-x)^n e^{-\frac{x^2}{2}} dx + \int_{0}^{\infty} x^n e^{-\frac{x^2}{2}} dx \right]$$

$$= \begin{cases} \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_{0}^{\infty} x^n e^{-\frac{x^2}{2}} dx & , \quad n = 2k,\ k = 1,2,\dots \\ 0 & , \quad n = 2k-1,\ k = 1,2,\dots \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_{0}^{\infty} y^{\frac{n-1}{2}} e^{-y} dy & , \quad n = 2k,\ k = 1,2,\dots \\ 0 & , \quad n = 2k-1\ ,\ k = 1,2,\dots \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \frac{2^{\frac{n}{2}}}{\sqrt{\pi}} \Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right) & , \quad n = 2k,\ k = 1,2,\dots \\ 0 & , \quad n = 2k-1,\ k = 1,2,\dots \end{cases}$$

dır. $n = 1,3,5,\dots$ için,

$$E(X^n) = 0$$

$n = 2$ için,

$$E(X^2) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \Gamma\left(\frac{3}{2}\right)$$

$$= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{3}{2} - 1\right) \Gamma\left(\frac{3}{2} - 1\right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = 1$$

$n = 4$ için,

$$E(X^4) = \frac{2^2}{\sqrt{\pi}}\Gamma\left(\frac{5}{2}\right) = \frac{2^2}{\sqrt{\pi}}\frac{3}{2}\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = 3$$

elde edilir.

Örnek: X rasgele değişkenin olasılık yoğunluk fonksiyonu,

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\theta}e^{-\frac{x}{\theta}} & , \quad x > 0 \ (\theta > 0) \\ 0 & , \quad d.y. \end{cases}$$

olsun. $n = 1, 2, \ldots$ için

$$E(X^n) = \int_0^\infty x^n \frac{1}{\theta} e^{-\frac{x}{\theta}} dx = \theta^n \int_0^\infty y^n e^{-y} dy$$
$$= \theta^n \Gamma(n+1)$$

dır. $n = 1$ için,

$$E(X) = \theta$$

$n = 2$ için,

$$E(X^2) = \theta^2\Gamma(3) = 2\theta^2$$

ve

$$Var(X) = E(X^2) - (EX)^2 = 2\theta^2 - \theta^2 = \theta^2$$

elde edilir.

Örnek: X rasgele değişkenin olasılık fonksiyonu,

$$f(x) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!}, \quad x = 0, 1, 2, \ldots, \ (\lambda > 0)$$

olsun. X in beklenen değeri,

$$E(X) = \sum_{x=0}^{\infty} x \frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!} = \sum_{x=1}^{\infty} \frac{xe^{-\lambda}\lambda^x}{x!}$$

$$= \lambda e^{-\lambda} \sum_{x=1}^{\infty} \frac{\lambda^{x-1}}{(x-1)!} = \lambda e^{-\lambda} \sum_{x=0}^{\infty} \frac{\lambda^x}{x!}$$

$$= \lambda e^{-\lambda}\left(1 + \frac{\lambda^1}{1!} + \frac{\lambda^2}{2!} + \cdots + \frac{\lambda^n}{n!} + \cdots\right)$$

$$= \lambda$$

dır.

$X^2 = X(X-1) + X$ ifadesinden faydalanarak,

$$
\begin{aligned}
E(X^2) &= E[X(X-1)] + E(X) \\
&= \sum_{x=0}^{\infty} \frac{x(x-1)e^{-\lambda}\lambda^x}{x!} + \lambda \\
&= \sum_{x=2}^{\infty} \frac{x(x-1)e^{-\lambda}\lambda^x}{x!} + \lambda \\
&= \sum_{x=2}^{\infty} \frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{(x-2)!} + \lambda \\
&= e^{-\lambda}\lambda^2 \sum_{x=2}^{\infty} \frac{\lambda^{x-2}}{(x-2)!} + \lambda \\
&= \lambda^2 e^{-\lambda} \sum_{x=0}^{\infty} \frac{\lambda^x}{x!} + \lambda \\
&= \lambda^2 + \lambda
\end{aligned}
$$

elde edilir. Buradan,

$$Var(X) = E(X^2) - (EX)^2 = \lambda$$

bulunur.

Örnek: Bir günde 5 parça işleyen bir torna makinası için kusursuz olarak işlediği parçaların sayısı X olsun. X in olasılık fonksiyonu,

$$f(x) = \binom{5}{x}\left(\frac{4}{5}\right)^x\left(\frac{1}{5}\right)^{5-x}, \quad x = 0,1,2,3,4,5$$

dır. İşlenmemiş parçanın alış değeri a, işleme masrafı b, kusurlu işlenmiş parçanın hurda değeri c ve kusursuz işlenmiş parçanın satış değeri d olmak üzere günlük kazancın beklenen değeri nedir?

K rasgele değişkeni günlük kazancı göstermek üzere,

$$K = -5(a+b) + (5-x)c + Xd$$

olarak ifade edilebilir. $E(X) = 4$ olduğu göz önüne alınırsa

$$
\begin{aligned}
E(K) &= -5(a+b) + (5-EX) \times c + EX \times d \\
&= -5(a+b) + c + 4d \\
&= 4d + c - 5(a+b)
\end{aligned}
$$

elde edilir.

KARAKTERİSTİK FONKSİYONLAR

Tanım: X bir rasgele değişken olmak üzere,

$$\Phi_X(t) = E(e^{itX}) = E(\cos(tX) + iE(\sin(tX))) \ , \ t \in \mathbf{R}$$

fonksiyonuna X in karakteristik fonksiyonu denir.

$|e^{itx}| = 1$ olduğundan $E(e^{itX})$ beklenen değeri her X için mevcuttur, yani her rasgele değişkenin karakteristik fonksiyonu vardır.

Örnek: X rasgele değişkeni c $(c \in \mathbf{R})$ noktasında yoğunlaşmış dağılıma sahip olduğunda,

$$\Phi_X(t) = E(e^{itX}) = \sum_x e^{itx} f(x) = e^{itc}, \ t \in \mathbf{R}$$

dır. $c = 0$ için $\Phi_X(t) = 1$ dir.

Örnek: X rasgele değişkenin olasılık fonksiyonu,

$$f(x) = \frac{1}{6}, \quad x = 1, 2, 3, 4, 5, 6$$

olmak üzere,

$$\Phi_X(t) = E(e^{itX}) = \sum_x e^{itx} f(x), \ t \in \mathbf{R}$$

$$= \frac{1}{6}e^{it} + \frac{1}{6}e^{2it} + \frac{1}{6}e^{3it} + \frac{1}{6}e^{4it} + \frac{1}{6}e^{5it} + \frac{1}{6}e^{6it}$$

dir.

Örnek: X rasgele değişkenin olasılık yoğunluk fonksiyonu,

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\theta} e^{-\frac{x}{\theta}} & , \quad x > 0 \\ 0 & , \quad d.y. \end{cases}$$

olmak üzere,

$$\Phi_X(t) = E(e^{itX}) = \int_0^\infty e^{itx} \frac{1}{\theta} e^{-x/\theta} dx$$

$$= (1 - i\theta t)^{-1}, \ t \in \mathbb{R}$$

dır.

Teorem: X rasgele değişkenin karakteristik fonksiyonu Φ_X olmak üzere,

a) $\Phi_X(0) = 1$

b) $|\Phi_X(t)| \leq 1,\ t \in \mathbf{R}$

c) Φ_X düzgün sürekli,

d) $\Phi_{aX+b}(t) = e^{itb}\Phi_X(ta),\ t \in \mathbf{R},$ (a ve b sabit)

dır.

İspat:

a) $\Phi_X(t) = E(e^{itX})$ olmak üzere $\Phi_X(0) = E(1) = 1$dir.

b) $|\Phi_X(t)| = |Ee^{itX}| \leq E|e^{itX}| = E(1) = 1$

c)

$$\begin{aligned}|\Phi_X(t+h) - \Phi_X(t)| &= |E(e^{i(t+h)X} - e^{itX})| \\ &= |E[e^{itX}(e^{ihX} - 1)]| \\ &\leq E|e^{itX}(e^{ihX} - 1)| = E|e^{ihX} - 1|\end{aligned}$$

X in sürekli rasgele değişken olduğunu varsayalım. O zaman

$$|\Phi_X(t+h) - \Phi_X(t)| \leq \int_{-\infty}^{\infty} |e^{ihx} - 1| f(x)dx$$

dır. $\epsilon > 0$ için, yeterince büyük $M > 0$ sayısı

$$\int_{|x|\geq M} f(x)dx < \frac{\epsilon}{4}$$

olacak şekilde alınırsa,

$$|\Phi_X(t+h) - \Phi_X(t)| \leq \int_{-M}^{M} |e^{ihx} - 1| f(x)dx + 2 \int_{x\geq|M|} f(x)dx < \epsilon$$

olur (h sadece ϵ'a bağlıdır). Φ_X düzgün süreklidir.

X in kesikli olması durumunda integral yerine toplam işareti gelecektir.

d)

$$\Phi_{aX+b}(t) = E(e^{it(aX+b)}) = E(e^{itb}e^{itaX}) = e^{itb}E(e^{itaX})$$

$$= e^{itb}\Phi_X(ta)$$

Teorem: Bir rasgele değişkenin n. momenti varsa, $k \leq n$ için

$$\frac{d^k}{dt^k}\Phi_X(t)|_{t=0} = i^k E(X^k)$$

dır.

İspat: $k = 1,2,\ldots.n$ için

$$|E(Xe^{kitX})| \leq E|X^k| = \begin{cases} \sum\limits_x |x^k| f(x) < \infty \\ \int\limits_{-\infty}^{\infty} |x^k| f(x)dx < \infty \end{cases}$$

dır.

$$\frac{d\Phi_X(t)}{dt} = \frac{d}{dt}E(e^{itX}) = E(\frac{d}{dt}e^{itX}) = iE(Xe^{itX})$$

$$\vdots$$

$$\frac{d^k\Phi_X(t)}{dt^k} = i^k E(X^k e^{itX}),\ (k \leq n)$$

olmak üzere

$$\frac{d^k\Phi_X(t)}{dt^k}|_{t=0} = i^k E(X^k),\ (k \leq n)$$

dır.

Örnek: X rasgele değişkenin olasılık fonksiyonu

$$f(x) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!},\ x = 0,1,2,\ldots$$

olmak üzere

$$\Phi_X(t) = E(e^{itX})$$

$$= \sum_{x=0}^{\infty} \frac{e^{itx}e^{-\lambda}\lambda^x}{x!}$$

$$= e^{-\lambda}\sum_{x=0}^{\infty} \frac{(\lambda e^{it})^x}{x!}$$

$$= e^{-\lambda}e^{\lambda e^{it}}$$

$$= e^{\lambda(e^{it}-1)}$$

dır. Buradan,

$$iE(X) = \frac{d}{dt}\Phi_X(t)|_{t=0} = i\lambda e^{it}e^{\lambda(e^{it}-1)}|_{t=0} = i\lambda$$

$$i^2E(X^2) = \frac{d^2}{dt^2}\Phi_X(t)|_{t=0} = \left[i^2\lambda e^{it}e^{\lambda(e^{it}-1)} + (i\lambda e^{it})^2e^{\lambda(e^{it}-1)}\right]|_{t=0}$$

$$= i^2(\lambda + \lambda^2)$$

Teorem: Bir X rasgele değişkenin olasılık (yoğunluk) fonksiyonu f, dağılım fonksiyonu F ve karakteristik fonksiyonu Φ olmak üzere:

i) $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, $(x_1 < x_2)$ noktalarında F sürekli ise

$$F(x_2) - F(x_1) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2\pi}\int_{-T}^{T} \frac{1 - e^{-itx_1} - e^{-itx_2}}{it}\Phi(t)dt$$

ii) X sürekli bir rasgele değişken ise,

$$f(x) = \lim_{h\to 0}\lim_{T\to\infty} \frac{1}{2\pi}\int_{-T}^{T} \frac{1 - e^{-ith}}{ith}e^{itx}\Phi(t)dt$$

ve $\int_{-\infty}^{\infty} |\theta(t)|dt < \infty$ ise,

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-itx}\Phi(t)dt$$

iii) X kesikli rasgele değişken ise,

$$f(x) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} e^{-itx}\Phi(t)dt$$

dır.

Bu teoremin ispatı burada yapılmayacaktır. Teoremin sonucu olarak dağılım fonksiyonların kümesi ile karakteristik fonksiyonların kümesi arasında bire-bir eşleme yapılabileceği söylenebilir. Şimdi karakteristik fonksiyonların kümesini belirleyen Bochner-Khincin teoremini ispatsız olarak verelim.

Teorem: (**Bochner**-**KhinchinTeoremi**)

$\mathbb{C}$ kompleks sayıların kümesi olmak üzere bir $\Phi : \mathbf{R} \to \mathbb{C}$ fonksiyonu sürekli ve $\Phi(0) = 1$ olsun. Φ nin karakteristik fonksiyon olması için gerek ve yeter şart her $t_1, t_2, \ldots, t_n \in \mathbf{R}$ ve her $c_1, c_2, \ldots, c_n \in \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}$ için

$$\sum_{k=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \Phi(t_j - t_k) c_j \overline{c}_k \geq 0$$

olmasıdır.(Burada $\overline{c}$, c nin eşleniği olan kompleks sayıdır, yani $c = a + bi$ ise $\overline{c} = a - ib$ dır.)

Örnek: $\Phi(t) = e^{ict}$, $c \in \mathbf{R}$ karakteristik fonksiyonuna karşılık gelen dağılım nedir?

$x_1 < x_2$ için

$$F(x_2) - F(x_1) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-T}^{T} \frac{e^{itx_1} - e^{itx_2}}{it} e^{ict} dt$$

$$= \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-T}^{T} \frac{e^{it(c-x_1)} - e^{it(c-x_2)}}{it} dt$$

$$= \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-T}^{T} \frac{\sin t(c-x_1) - \sin t(c-x_2)}{t} dt$$

$$= \lim_{T\to\infty} \frac{1}{\pi} \int_{0}^{T} \frac{\sin t(c-x_1) - \sin t(c-x_2)}{t} dt$$

olmak üzere,

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{\pi} \int_{0}^{T} \frac{\sin at}{t} dt = \begin{cases} \frac{1}{2} & , \quad a > 0 \\ -\frac{1}{2} & , \quad a < 0 \end{cases}$$

olduğu göz önüne alınırsa,

$x_1, x_2 < c$ için

$$F(x_2) - F(x_1) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0$$

$x_1, x_2 > c$ için

$$F(x_2) - F(x_1) = -\frac{1}{2} - (-\frac{1}{2}) = 0$$

$x_1 < c < x_2$ için

$$F(x_2) - F(x_1) = \frac{1}{2} - (-\frac{1}{2}) = 1$$

dir. Dağılım fonksiyonunun özelliklerinden,

$$F(x_2) = \lim_{x_1 \to -\infty} [F(x_2) - F(x_1)] = \begin{cases} 0 \;, & x_2 < c \\ 1 \;, & x_2 \geq c \end{cases}$$

bulunur. Bu dağılım fonksiyonu c noktasında yoğunlaşmış dağılıma aittir.

Şimdi aynı problemde, karakteristik fonksiyonun bir kesikli dağılıma karşılık geldiğini bildiğimizi varsayalım. Buna göre,

$$f(x) = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} e^{-itx} e^{itc} dt$$

$$= \lim_{T \to \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} e^{it(c-x)} dt$$

$$= \begin{cases} 1 \;, & x = c \\ \lim\limits_{T \to \infty} \frac{1}{2T} \frac{e^{it(c-x)}}{i(c-x)} \Big|_{-T}^{T} \;, & x \neq c \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 1 \;, & x = c \\ \lim\limits_{T \to \infty} \frac{\sin T(x-c)}{T(x-c)} \;, & x \neq c \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 1 \;, & x = c \\ 0 \;, & x \neq c \end{cases}$$

bulunur.

Örnek 4.2.6 $\Phi(t) = e^{-t^2/2}$, karakteristik fonksiyonu sürekli bir dağılıma karşılık gelmektedir. Bu dağılımın olasılık yoğunluk fonksiyonunu Teorem 4.2.3 yardımıyla bulmaya çalışalım.

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\Phi(t)| dt = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2/2} dt = \sqrt{2\pi} < \infty$$

olmak üzere

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-itx} \Phi(t) dt$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}(t^2+2itx)} dt$$

$$= \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{1}{2}x^2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}(t+ix)^2} dt$$

$$= \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{1}{2}x^2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}u^2} du$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2}, \; x \in \mathbb{R}$$

dır.

Karakteristik fonksiyon esasında bir Fourier dönüşümüdür. Matematik analizde ters Fourier dönüşümleri geniş bir şekilde ele alınmaktadır. Fourier dönüşümleri ile ilgili hazır formüller içeren tablolar hazırlanmıştır. Burada bunlara değinmeyeceğiz.

ÜRETİCİ FONKSİYONLAR

Bu kısımda momentlerin hesaplanmasında kolaylık sağlayan bazı fonksiyonlar ele alınacaktır.

Tanım: X bir rasgele değişken olmak üzere (var olması halinde),

$$M_X(t) = E(e^{tX}), \; -h < t < h, \; (h > 0)$$

fonksiyonuna X 'in moment üreten (moment çıkaran) fonksiyonu denir.

Örnek: X rasgele değişkenin olasılık yoğunluk fonksiyonu,

$$f(x) = \begin{cases} x^{-2} & , \quad x \geq 1 \\ 0 & , \quad d.y. \end{cases}$$

olsun. $\forall \; t > 0$ için,

$$\frac{e^{tx}}{x^2} > \frac{tx}{x^2}, \quad (x \geq 1)$$

ve $\int_1^{\infty} x^{-1}dx$ integrali ıraksak olduğundan,

$$E(e^{tX}) = \int_1^{\infty} \frac{e^{tx}}{x^2}dx$$

integrali ıraksaktır, yani $t > 0$ için $E(e^{tX})$ beklenen değeri mevcut değildir. X in moment üreten fonksiyonu yoktur.

Örnek: X rasgele değişkenin olasılık yoğunluk fonksiyonu,

$$f(x) = \begin{cases} e^{-x} & , \quad x > 0 \\ 0 & , \quad d.y. \end{cases}$$

olsun.

$$\int_0^{\infty} e^{tx}e^{-x}dx = \int_0^{\infty} e^{(t-1)x}dx$$

integrali $t < 1$ için yakınsak olduğundan, $M_X(t)$ vardır ve

$$M_X(t) = \int_0^{\infty} e^{tx}e^{-x}dx$$

$$= \frac{e^{(t-1)x}}{t-1} \Big|_{x=0}^{\infty}$$

$$= (1-t)^{-1} \ , \ -1 < t < 1$$

dır.

Örnek: X rasgele değişkenin olasılık fonksiyonu,

$$f(x) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!}, \ x = 0,1,2,\ldots \quad (\lambda > 0)$$

olsun. $\forall\ t \in \mathbf{R}$ için

$$\sum_{x=0}^{\infty} \frac{e^{tx}e^{-\lambda}\lambda^x}{x!}$$

serisi yakınsak olduğundan

$$M_X(t) = \sum_{x=0}^{\infty} \frac{e^{tx}e^{-\lambda}\lambda^x}{x!}$$

$$= e^{\lambda(e^t-1)}, \ t \in \mathbb{R}$$

dır.

Eğer bir X rasgele değişkenin moment üreten fonksiyonu varsa,

$$M_X(it) = \Phi_X(t)$$

dır. Dolayısıyla moment üreten fonksiyonlar da olasılık dağılımlarını tek biçimde belirlemektedir.

Bir X rasgele değişkenin moment üreten fonksiyonu,

$$M_X(t) = e^{(e^t-1)} = e^{-1}\sum_{x=0}^{\infty}\frac{e^{tx}}{x!}$$

ise X in olasılık fonksiyonu

$$f(x) = \frac{e^{-1}}{x!},\ x = 0, 1, 2, \ldots$$

dır.

Bir X rasgele değişkenin moment üreten fonksiyonu varsa,

$$\frac{d^n}{dt^n}M_X(t)|_{t=0} = E(X^n),\ n = 1, 2\ldots$$

dır.

Örnek: $M_X(t) = e^{\lambda(e^t-1)},\ t \in \mathbf{R}$ olmak üzere

$$E(X) = \frac{dM_X(t)}{dt}|_{t=0} = \lambda e^t e^{\lambda(t-1)}|_{t=0} = \lambda$$

$$E(X^2) = \frac{d^2M_X(t)}{dt^2}|_{t=0}$$

$$= [\lambda e^t e^{\lambda(e^t-1)} + (\lambda e^t)^2 e^{\lambda(e^t-1)}]|_{t=0}$$

$$= \lambda + \lambda^2$$

elde edilir.

Örnek: X rasgele değişkenin olasılık yoğunluk fonksiyonu,

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\Gamma(\alpha)}x^{\alpha-1}e^{-x} & ,\quad x > 0,\ \alpha > 0 \\ 0 & ,\quad d.y. \end{cases}$$

olsun.

$$M_X(t) = \int_0^{\infty}\frac{1}{\Gamma(\alpha)}x^{\alpha-1}e^{-(i-t)x}dx = (1-t)^{-\alpha},\ t < 1$$

olmak üzere

$$E(X^n) = \frac{d^n}{dt^n}(1-t)^{-\alpha}|_{t=0} = \alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+(n-1))$$

dır.

Bir X rasgele değişkenin moment üreten fonksiyonu var olsun.

$$K_n = \frac{d^n}{dt^n}(\ln M_X(t))|_{t=0},\ n = 1,2,\ldots$$

sayılarına X in $n.$ dereceden kümülantı denir.

Örneğin,

$$K_1 = \frac{M'_X(0)}{M_X(0)} = E(X)$$

$$K_2 = \frac{M''_X(0)M_X(0) - [M'_X(0)]^2}{[M_X(0)]^2} = E(X^2) - (EX)^2 = Var(X)$$

$$K_3 = E(X^3) - 3E(X^2)EX + 2(EX)^3$$

$$K_4 = E(X^4) - 4E(X^3)EX - 3(EX^2)^2 + 12E(X^2)(EX)^2 - 6(EX)^4$$

dır.

Örnek: $M_X(t) = e^{\lambda(e^t-1)},\ t \in \mathbf{R}$ olsun. Kümülantlar,

$$K_n = \frac{d^n}{dt^n}\ln e^{\lambda(e^t-1)}|_{t=0}$$

$$= \lambda e^t|_{t=0}$$

$$= \lambda\ ,\ n = 1,2,\ldots$$

dır.

Tanım: $\{t \in \mathbf{R} : E(t^X) < \infty\}$ kümesinde tanımlı

$$N_X(t) = E(t^X)$$

fonksiyonuna X in çarpımsal moment üreten fonksiyonu denir. Eğer $k = 1,2,\ldots n$ için,

$$\frac{d^n}{dt^n}[E(t^X)] = E[\frac{d^n}{dt^n}(t^X)]$$

oluyorsa,

$$\frac{d^n}{dt^n}N_X(t)|_{t=1} = E[X(X-1)\cdots(X-n+1)],\ n = 1,2,\ldots$$

dır.

Örnek: $M_X(t) = e^{\lambda(e^t-1)},\ t \in \mathbf{R}$ moment üreten fonksiyona sahip rasgele değişken için,

$$N_X(t) = \sum_{x=0}^{\infty} t^x \frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!}$$

$$= e^{-\lambda} \sum_{x=0}^{\infty} \frac{(t\lambda)^x}{x!}$$

$$= e^{\lambda(t-1)},\ t \in \mathbb{R}$$

olmak üzere,

$$E(X) = \frac{d}{dt} N_X(t)|_{t=0} = \lambda e^{\lambda(t-1)}|_{t=1} = \lambda$$

$$E[X(X-1)] = \lambda^2 e^{\lambda(t-1)}|_{t=1} = \lambda^2$$

ve

$$E[X(X-1)\cdots(X-n+1)] = \lambda^n e^{\lambda(t-1)}|_{t=1} = \lambda^n$$

dır.

Örnek: X rasgele değişkenin olasılık yoğunluk fonksiyonu,

$$f(x) = \begin{cases} e^{-x} & , \quad x > 0 \\ 0 & , \quad d.y. \end{cases}$$

olsun.

$$N_X(t) = \int_0^{\infty} t^x e^{-x} dx$$
$$= \int_0^{\infty} \left(\frac{e}{t}\right)^{-x} dx$$
$$= \int_0^{\infty} e^{(\ln t - 1)x} dx,\ \ln t < 1$$
$$= (1 - \ln t)^{-1},\ 0 < t < e$$

olmak üzere

$$E(X) = -1(1-\ln t)^{-2}(t^{-1})|_{t=1} = -1$$

$$E[X(X-1)] = 2(1-\ln t)^{-3}(t^{-2}) + (1-\ln t)^{-2}(t^{-2})|_{t=1} = 3$$

dır.

X rasgele değişkeni kesikli ve aldığı değerler $x = 0, 1, 2, \ldots$ olduğunda

$$N_X(t) = \sum_{x=0}^{\infty} f(x) t^x,\ |t| \leq 1$$

fonksiyonuna aynı zamanda olasılık üreten fonksiyon da denir.

ÇOK DEĞİŞKENLİ DAĞILIMLARDA BEKLENEN DEĞER

Tanım: $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ bir rasgele vektör ve

$$g : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R} \quad , \quad \forall B \in \mathfrak{B}(\mathbf{R})$$

fonksiyonu,

$$\{(x_1, x_2, \ldots, x_n) : g(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in B\} \in \mathfrak{B}(\mathbf{R}^n)$$

özelleğine sahip bir fonksiyon olmak üzere,

i) $(X_1, X_2, .., X_n)$ kesikli, $\sum\limits_{(x_1, x_2, \ldots, x_n)} |g(x_1, \ldots, , x_n)| f(x_1, \ldots, , x_n) < \infty$ olduğunda,

$$E(g(X_1, X_2, \ldots, X_n)) = \sum_{(x_1, x_2, \ldots, x_n)} g(x_1, x_2, \ldots, x_n) f(x_1, x_2, \ldots x_n)$$

ii) $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ sürekli, $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \cdots \int\limits_{-\infty}^{\infty} |g(x_1, \ldots, , x_n)| f(x_1, \ldots., x_n) dx_1 \cdots dx_n < \infty$ olduğunda,

$$E(g(X_1, X_2, \ldots, X_n)) = \int_{-\infty}^{\infty} \ldots \int_{-\infty}^{\infty} g(x_1, \ldots, x_n) f(x_1, \ldots, x_n) dx_1 \cdots dx_n$$

değerine $g(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ nin beklenen değeri denir.

Tanım: $(X_1, X_2, \ldots X_n)$ bir rasgele vektör olmak üzere:

a) Var olması halinde $E(X^{k_1} X^{k_2} \cdots X^{k_n})$ değerine $X_1, X_2, \ldots, X_n$ nin $(k_1, k_2, \ldots, k_n)$ –ortak momenti denir. Buradaki $k_1, k_2, \ldots, k_n$ ler negatif olmayan tam sayılardır.

b) Var olması halinde $E[(X_1 - EX_1)^{k_1} (X_2 - EX_2)^{k_2} \cdots (X_n - EX_n)^{k_n}]$ değerine $X_1, X_2, \ldots, X_n$ nin $(k_1, k_2, \ldots, k_n)$ –merkezi ortak momenti denir.

c) Var olması halinde,

$$M_{X_1, X_2, \ldots, X_n}(t_1, t_2, \ldots, t_n) = E(e^{t_1 X_1 + t_2 X_2 + \cdots + t_n X_n}) \ , \quad \begin{array}{l} t_i \in (-h_i, h_i) \\ i = 1, 2, \ldots, n \end{array}$$

fonksiyonuna $X_1, X_2, \ldots, X_n$ nin ortak dağlılımının (veya $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ rasgele vektörünün) moment üreten fonksiyonu denir.

d)

$$\Phi_{X_1,X_2,\dots,X_n}(t_1,t_2,\dots,t_n) = E(e^{i(t_1X_1+t_2X_2+\cdots+t_nX_n)}),\ t_i \in \mathbf{R},\ i = 1,2,\dots,n$$

fonksiyonuna $X_1,X_2,\dots,X_n$ nin ortak dağılımının (veya $(X_1,X_2,\dots,X_n)$ rasgele vektörünün) karakteristik fonksiyonu denir.

Şimdi moment üreten ve karakteristik fonksiyonların bazı özelliklerini verelim

a)

$$\Phi_{X_1,X_2,\dots,X_n}(0,0,\dots,0) = M_{X_1,X_2,\dots,X_n}(0,0,\dots,0) = 1$$

b)

$$\Phi_{a_1X_1+b_1+\cdots+a_nX_n+b_n}(t_1,\dots,t_n) = e^{it_1b_1+\cdots+it_nb_n}\Phi_{X_1,\dots,X_n}(a_1t_1,\dots,a_nt_n)$$

$$M_{a_1X_1+b_1+\cdots+a_nX_n+b_n}(t_1,\dots,t_n) = e^{t_1b_1+\cdots+t_nb_n}M_{X_1,\dots,X_n}(a_1t_1,\dots,a_nt_n)$$

c) $X_1,X_2\dots X_n$ nin $(k_1,k_2,\dots k_n)$ –ortak momentinin var olması halinde

$$\frac{\partial^{k_1+k_2+\cdots+k_n}}{\partial t_1^{k_1}\partial t_2^{k_2}\cdots\partial t_n^{k_n}}\Phi_{X_1,\dots,X_n}(t_1,\dots,t_n)|_{t_1=\cdots=t_n=0} = i^{\sum_{j=1}^{n} k_j}E(X_1^{k_1}X_2^{k_2}\cdots X_n^{k_n})$$

$$\frac{\partial^{k_1+k_2+\cdots+k_n}}{\partial t_1^{k_1}\partial t_2^{k_2}\cdots\partial t_n^{k_n}}M_{X_1,\dots,X_n}(t_1,\dots,t_n)|_{t_1=\cdots=t_n=0} = E(X_1^{k_1}X_2^{k_2}\cdots X_n^{k_n})$$

d)

$$\Phi_{X_1,X_2,\dots X_n}(t_1,t_2,\dots,t_k,0,0,\dots,0) = \Phi_{X_1,X_2,\dots,X_k}(t_1,t_2,\dots,t_k)$$
$$M_{X_1,X_2,\dots X_n}(t_1,t_2,\dots,t_k,0,0,\dots,0) = M_{X_1,X_2,\dots,X_k}(t_1,t_2,\dots,t_k)$$

Örnek: (X_1,X_2,X_3) vektörünün olasılık yoğunluk onksiyonu,

$$f(x_1,x_2,x_3) = \begin{cases} e^{-x_1-x_2-x_3} & ,\quad x_1 > 0,\ x_2 > 0,\ x_3 > 0 \\ \\ 0 & ,\quad d.y. \end{cases}$$

olsun. (X_1,X_2,X_3) ün moment üreten fonksiyonu,

$$M_{X_1,X_2,X_3}(t_1,t_2,t_3) = E(e^{t_1X_1+t_2X_2+t_3X_3})$$

$$= \int_0^\infty\int_0^\infty\int_0^\infty e^{t_1X_1+t_2X_2+t_3X_3}e^{-x_1-x_2-x_3}dx_1dx_2dx_3$$

$$= \frac{1}{(1-t_1)(1-t_2)(1-t_3)},\ t_1 < 1,\ t_2 < 1,\ t_3 < 1$$

dır. Buradan, örneğin,

$$E(X_1^2X_2X_3) = \frac{\partial^4}{\partial t_1^2\partial t_2\partial t_3}((1-t_1)^{-1}(1-t_2)^{-1}(1-t_3)^{-1})|_{t_1=t_2=t_3=0}$$

$$= 2(1-t_1)^{-3}(1-t_2)^{-2}(1-t_3)^{-2}|_{t_1=t_2=t_3=0}$$

$$= 2$$

ve (X_1, X_2) nin moment üreten fonksiyonu,

$$M_{X_1,X_2}(t_1,t_2) = M_{X_1,X_2,X_3}(t_1,t_2,0)$$

$$= (1-t_1)^{-1}(1-t_2)^{-1}$$

elde edilir.

$$E(X_1) = \frac{\partial}{\partial t_1} M_{X_1,X_2,X_3}(t_1,t_2,t_3)|_{t_1=t_2=t_3=0}$$

$$= (1-t_1)^{-2}(1-t_2)^{-1}(1-t_3)^{-1}|_{t_1=t_2=t_3=0}$$

$$= 1$$

olmak üzere, bu beklenen değer X_1 in

$$M_{X_1}(t_1) = M_{X_1,X_2,X_3}(t_1,0,0) = (1-t_1)^{-1} \ , \ t_1 < 1$$

moment üreten fonksiyonu yardımıyla da elde edilebilir. Gerçekten,

$$E(X_1) = \frac{d}{dt_1} M_{X_1}(t_1)|_{t_1=0} = (1-t_1)^{-2}|_{t_1=0} = 1$$

dır.

Aşağıdaki teoremlerde geçecek olan beklenen değerlerin var olduğunu varsayacağız.

Teorem: $(X_1, X_2, .., X_n)$ bir rasgele vektör ve $c_1, c_2, \ldots, c_k$ ler sabit sayılar olmak üzere,

$$E\left[\sum_{i=1}^{k} c_i g_i(X_1, X_2, \ldots, X_n)\right] = \sum_{i=1}^{k} c_i E(g_i(X_1, X_2, \ldots, X_n))$$

dır.

İspat: (Ödev)

Bu teoremin bir sonucu olarak

$$E\left(\sum_{i=1}^{k} c_i X_i\right) = \sum_{i=1}^{k} c_i E(X_i)$$

yazılır.

Teorem: $X_1, X_2, \ldots, X_n$ bağımsız rasgele değişkenler ve $u_i : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $i = 1, 2, \ldots, n$, fonksiyonları $\forall B \in \mathfrak{B}$ için $\{x : u_i(x) \in B\} \in \mathfrak{B}$ özelleğine sahip olmak üzere,

$$E\left(\prod_{i=1}^{n} u_i(X_i)\right) = \prod_{i=1}^{n} E(u_i(X_i))$$

dır.

İspat: (Ödev)

Bu teoremin bir sonucu olarak: Eğer $X_1, X_2, \ldots, X_n$ bağımsız rasgele değişkenler ise $X_1, X_2, \ldots, X_n$ nin ortak dağılımının karakteristik ve moment üreten fonksiyonları için,

$$\Phi_{X_1,X_2,\ldots,X_n}(t_1,t_2,\ldots,t_n) = \Phi_{X_1}(t_1)\Phi_{X_2}(t_2)\cdots\Phi_{X_n}(t_n)$$

$$M_{X_1,X_2,\ldots,X_n}(t_1,t_2,\ldots,t_n) = M_{X_1}(t_1)M_{X_2}(t_2)\cdots M_{X_n}(t_n)$$

olduğu söylenebilir. Ayrıca, $u : \mathbf{R}^k \to \mathbf{R}$ ve $v : \mathbf{R}^{n-k} \to \mathbf{R}$ olmak üzere, $X_1, X_2, \ldots, X_k$ nin bir fonksiyonu olan $u(X_1, X_2, \ldots, X_k)$ rasgele değişkeni ile $X_{k+1}, X_{k+2}, \ldots, X_n$ nin bir fonksiyonu olan $v(X_{k+1}, X_{k+2}, \ldots, X_n)$ rasgele değişkeni bağımsız olduğundan,

$$E[u(X_1,\ldots,X_k)v(X_{k+1},\ldots,X_n)] = E[u(X_1,\ldots,X_k)]E[v(X_{k+1},\ldots,X_n)]$$

dır.

Örnek: $X_1, X_2, \ldots, X_n$ bağımsız rasgele değişkenler ve herbirinin olasılık dağılımının yoğunluk fonksiyonu

$$f(x) = \begin{cases} e^{-x} & , \quad x > 0 \\ 0 & , \quad d.y. \end{cases}$$

olsun. $Y = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$ rasgele değişkeninin olasılık dağılımını bulunuz.

İlk önce Y nin moment üreten fonksiyonunu bulalım.

$$\begin{aligned} M_Y(t) &= E(e^{tY}) \\ &= E(e^{tX_1+tX_2+\cdots+tX_n}) \\ &= E\left(\prod_{i=1}^{n} e^{tX_i}\right) = \prod_{i=1}^{n} E(e^{tX_i}) \\ &= \prod_{i=1}^{n} M_{X_i}(t) = (1-t)^{-n} \end{aligned}$$

dır.

Bu moment üreten fonksiyona sahip Y rasgele değişkenin olasılık yoğunluk fonksiyonu

$$f(y) = \begin{cases} \dfrac{1}{\Gamma(n)} y^{n-1} e^{-y} & , \quad y > 0 \\ 0 & , \quad d.y. \end{cases}$$

dır (Örnek 4.3.5).

Örnek: $X_1, X_2, \dots, X_k$ bağımsız rasgele değişkenler ve $i = 1,2,\dots,k$ için,

$$f_i(x_i) = \binom{n_i}{x_i} p^{x_i}(1-p)^{n_i - x_i}, \quad x_i = 0,1,\dots,n_i$$

olsun $(0 < p < 1)$. $Y = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$ rasgele değişkenin olasılık dağılımını bulunuz.

$$M_{X_i} = (1 - p + pe^t)^{n_i}$$

olmak üzere,

$$M_Y(t) = E(e^{tY}) = E\left(\prod_{i=1}^{k} e^{tX_i}\right) = \prod_{i=1}^{k} E(e^{tX_i})$$

$$= \prod_{i=1}^{k} M_{X_i}(t) = \prod_{i=1}^{k} (1 - p + pe^t)^{n_i}$$

$$= (1 - p + pe^t)^{\sum_{i=1}^{k} n_i}$$

olarak elde edilir. Bu moment üreten fonksiyona karşılık gelen olasılık fonksiyonu,

$$f(y) = \binom{\sum_{i=1}^{k} n_i}{y} p^y (1-p)^{\sum_{i=1}^{k} n_i - y}, \; y = 0,1,2,\dots,\sum_{i=1}^{k} n_i$$

dır.

Örnek: $X_1, X_2, \dots, X_n$ rasgele değişkenleri bağımsız ve $i = 1,2,\dots,n$ için,

$$f(x_i) = \frac{e^{-\lambda_i} \lambda_i^{x_i}}{x_i!}, \quad x_i = 0,1,2,\dots.$$

olsun. $Y = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$ rasgele değişkenin olasılık dağılımını bulunuz.

$$M_Y(t) = \prod_{i=1}^{n} M_{x_i}(t) = \prod_{i=1}^{n} e^{\lambda_i(e^t - 1)} = e^{\sum_{i=1}^{n} \lambda_i(e^t - 1)}$$

olmak üzere (Örnek 4.3.3) Y nin olasılık fonksiyonu,

$$f(y) = \frac{e^{-\sum_{i=1}^{n} \lambda_i} \left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i\right)^y}{y!}, \quad y = 0,1,2,\dots$$

dır.

Tanım: $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ n –boyutlu bir rasgele vektör olmak üzere:

a) $Cov(X_i, X_j) = E[(X_i - EX_i)(X_j - E(X_j))]$ $i,j = 1,2,\dots,n$ değerine X_i ile X_j nin

kovaryansı,

b) $\rho_{X_i,X_j} = \dfrac{Cov(X_i,X_j)}{\sqrt{Var(X_i)Var(X_j)}}, \quad i,j = 1,2,\ldots,n$ değerine X_i ile X_j arasındaki **korelasyon katsayısı**,

c) $(Cov(X_i,X_j))_{n\times n}$ matrisine $(X_1,X_2,\ldots,X_n)$ rasgele vektörünün **var-yans-kovaryans matrisi**

d) $(\rho_{X_i,X_j})_{n\times n}$ matrisine $(X_1,X_2,\ldots,X_n)$ rasgele vektörünün **korelas-yon matrisi** denir.

Teorem: Herhangi (X,Y) rasgele vektörünü için:

a) $Cov(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$

b) X ve Y bağımsız$\Rightarrow$ $Cov(X,Y) = 0,\ (\rho_{X,Y} = 0)$

c) $|\rho_{X,Y}| \leq 1,$

d) $|\rho_{X,Y}| = 1 \Leftrightarrow$ X ve Y arasında lineer ilşki var

dır.

İspat:

a)

$$\begin{aligned} Cov(X,Y) &= E[(X-EX)(Y-EY)] \\ &= E(XY - XEY - YEX + EXEY) \\ &= E(XY) - EXEY \end{aligned}$$

b)

X ve Y bağımsız $\Rightarrow \quad E[(X-EX)(Y-EY)] = E(X-EX)E(Y-EY) = 0$

$$\Rightarrow \quad Cov(X,Y) = 0$$

Buradaki gerektirmenin tersi doğru değildir. Bunu bir örnekle açıklayalım

(X,Y) nin olasılık fonksiyonu,

$$f_{X,Y} = 1/3,\ (x,y) = (-1,1),(0,1),(1,1)$$

olmak üzere,

$$f_X(x) = 1/3,\ x = -1,0,1$$

$$f_Y(y) = 1,\ y = 1$$

ve

$$Cov(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$$

$$= 0 - 0 \times (1/3) = 0$$

dır, ancak

$$f_{X,Y} \neq f_X \times f_Y$$

olduğundan, X ve Y bağımsız değildir.

c) ve d) şıklarını ispatlayınız.

Bir boyutlu rasgele değişkenlerde $E(X)$ beklenen değeri X in olasılık dağılımının "merkezi", $Var(X)$ değeri ise bu merkez etrafında "yayılımının" bir ölçüsüdür. İki boyutlu rasgele değişkenlerde korelasyon katsayısı, bu rasgele değişkenler arasındaki lineer ilişkinin ölçüsüdür. $|\rho_{X,Y}| = 1$ olduğunda X ve Y arasında tam lineer ilişki, $|\rho_{X,Y}|$ değeri bire yakın olduğunda güçlü bir lineer ilişki, $\rho_{X,Y} = 0$ olduğunda ise lineer ilişki yoktur denir. Görüldüğü gibi X ve Y nin bağımsız olmaları ilişkisiz olmalarını gerektirir ancak tersi doğru değildir.

Örnek: (X,Y) nin aşağıda verilen dağılımları için kovaryans ve korelasyon katsayısılarını karşılaştırınız.

a)

$Y \diagdown X$	0	1	2	
0	0	1/8	2/8	3/8
1	0	1/8	1/8	2/8
2	3/8	0	0	3/8
	3/8	2/8	3/8	

$E(X) = 1$, $Var(X) = 3/4$

$E(Y) = 1$, $Var(Y) = 3/4$

$E(XY) = 3/8$, $Cov(X,Y) = -5/8$

$\rho_{X,Y} = -0.83$

b)

$Y \diagdown X$	0	1	2	
0	0	0	3/8	3/8
1	0	2/8	0	2/8
2	3/8	0	0	3/8
	3/8	2/8	3/8	

$E(X) = 1$, $Var(X) = 3/4$

$E(Y) = 1$, $Var(Y) = 3/4$

$E(XY) = 2/8$, $Cov(X,Y) = -6/8$

$\rho_{X,Y} = -1$

c)

$Y \diagdown X$	0	1	2	
0	2/8	1/8	0	3/8
1	1/8	1/8	0	2/8
2	0	0	3/8	3/8
	3/8	2/8	3/8	

$E(X) = 1$, $Var(X) = 3/4$

$E(Y) = 1$, $Var(Y) = 3/4$

$E(XY) = 13/8$, $Cov(X,Y) = 5/8$

$\rho_{X,Y} = 0.83$

d)

$Y \diagdown X$	0	1	2	
0	3/8	0	0	3/8
1	0	2/8	0	2/8
2	0	0	3/8	3/8
	3/8	2/8	3/8	

$E(X) = 1$, $Var(X) = 3/4$

$E(Y) = 1$, $Var(Y) = 3/4$

$E(XY) = 14/8$, $Cov(X,Y) = 6/8$

$\rho_{X,Y} = 1$

$$E(X) = 1 \quad , \quad Var(X) = 3/4$$

e)

$Y \diagdown X$	0	1	2	
0	1/8	1/8	1/8	3/8
1	1/8	0	1/8	2/8
2	1/8	1/8	1/8	3/8
	3/8	2/8	3/8	

$$E(Y) = 1 \quad , \quad Var(Y) = 3/4$$

$$E(XY) = 1 \quad , \quad Cov(X,Y) = 0$$

$$\rho_{X,Y} = 0$$

b) ve d) de X ve Y arasında tam bir lineer ilşki vardır. d) de $Y = X$, b) de $Y = 2 - X$ dir. e) de X ile Y arasında ilişki yoktur, ancak X ile Y nin bağımsız olduğu söylenemez. Örneğin $f(1,1) \neq f_X(1)f_Y(1)$ dır.

Örnek: (X_1,X_2,X_3) vektörünün olasılık yoğunluk fonksiyonu

$$f(x_1,x_2,x_3) = \begin{cases} \frac{1}{2}e^{-x_3} & , \quad 0 \leq x_1 + x_2 \leq 2,\ x_3 > 0 \\ 0 & , \quad d.y. \end{cases}$$

olsun. (X_1,X_2,X_3) ün varyans-kovaryans ve korelasyon matrislerini bulunuz. X_3 ün marjinal olasılık yoğunluk fonksiyonu,

$$f_{X_3}(x_3) = \begin{cases} \int_0^2 \int_0^{2-x_1} \frac{1}{2}e^{-x_3}dx_2dx_1 & , \quad x_3 > 0 \\ 0 & , \quad d.y. \end{cases}$$

$$= \begin{cases} e^{-x_3} & , \quad x_3 > 0 \\ 0 & , \quad d.y. \end{cases}$$

ve (X_1,X_2) nin marjinal olasılık yoğunluk fonksiyonu,

$$f_{X_1,X_2}(x_1,x_2) = \begin{cases} \int_0^\infty 2e^{-x_3}dx_3 & , \quad 0 \le x_1+x_2 \le 2 \\ 0 & , \quad d.y. \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 1/2 & , \quad 0 \le x_1+x_2 \le 2 \\ 0 & , \quad d.y. \end{cases}$$

olmak üzere (X_1,X_2) ile X_3 bağımsız ve

$$\mu_1 = E(X_1) = 2/3, \quad \sigma_1^2 = Var(X_1) = 2/9$$

$$\mu_2 = E(X_2) = 2/3, \quad \sigma_2^2 = Var(X_2) = 2/9$$

$$\mu_3 = E(X_3) = 1, \quad \sigma_3^2 = Var(X_3) = 1$$

$$E(X_1X_2) = 1/3$$

$$E(X_1X_3) = EX_1EX_3 = 2/3$$

$$E(X_2X_3) = EX_2EX_3 = 2/3$$

dır.

$Cov(X_i,X_j)$ yerine σ_{ij} ve ρ_{X_i,X_j}yerine ρ_{ij} gösterimlerini kullanarak,

$$\sigma_{11} = E[(X_1 - EX_1)(X_1 - EX_1)] = \sigma_1^2 = 2/9$$

$$\sigma_{12} = E[(X_1 - EX_1)(X_2 - EX_2)] = E(X_1X_2) - EX_1EX_2 = -1/9$$

$$\sigma_{13} = E[(X_1 - EX_1)(X_3 - EX_3)] = E(X_1X_3) - EX_1EX_3 = 0$$

$$\sigma_{21} = \sigma_{12} = -1/9$$

$$\sigma_{22} = E[(X_2 - EX_2)(X_2 - EX_2)] = \sigma_2^2 = 2/9$$

$$\sigma_{23} = E[(X_2 - EX_2)(X_3 - EX_3)] = E(X_2X_3) - EX_2EX_3 = 0$$

$$\sigma_{31} = \sigma_{13} = 0$$

$$\sigma_{32} = \sigma_{23} = 0$$

$$\sigma_{33} = E[(X_3 - EX_3)(X_3 - EX_3)] = \sigma_3^2 = 1$$

olmak üzere (X_1, X_2, X_3) ün varyans-kovaryans matrisi,

$$\sum = \begin{bmatrix} 2/9 & -1/9 & 0 \\ -1/9 & 2/9 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ve korelasyon matrisi,

$$R = \begin{bmatrix} 1 & -1/2 & 0 \\ -1/2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

dır.

KOŞULLU BEKLENEN DEĞER

Tanım: (X_1,X_2) iki boyutlu bir rasgele vektör, $x_2 \in D_{X_2}$ için $X_2 = x_2$ verilmişken X_1 in koşullu dağılımının olasılık (yoğunluk) fonksiyonu $f_{X_1/(X_2=x_2)}$ ve $g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ her $B \in \mathfrak{B}$ için $\{s : g(s) \in B\} \in \mathfrak{B}$ özelliğine sahip bir fonksiyon olmak üzere:

a) Kesikli halde, $\sum_{x_1} |g(x_1)| f_{X_1/(X_2=x_2)}(x_1) < \infty$ olduğunda,

$$E(g(X_1)/(X_2 = x_2)) = \sum_{X_1} g(x_1) f_{X_1/(X_2=x_2)}(x_1)$$

b) Sürekli halde, $\int_{-\infty}^{\infty} |g(x_1)| f_{X_1/(X_2=x_2)}(x_1)dx_1 < \infty$ olduğunda,

$$E(g(x_1)/(X_2 = x_2)) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x_1) f_{X_1/(X_2=x_2)}(x_1)dx_1$$

değerine $X_2 = x_2$ verilmişken $g(X_1)$ in koşullu beklenen değeri denir.

Tanım: $c \in \mathbf{R}$ ve k bir doğal sayı olmak üzere:

a) $E((X_1 - c)^k/(X_2 = x_2))$ değerine $X_2 = x_2$ verilmişken X_1 in c ye göre $k.$ koşullu momenti,

b) $E(X^k/(X_2 = x_2))$ değerine $X_2 = x_2$ verilmişken X_1 in $k.$ koşullu momenti,

c) $E(X_1/(X_2 = x_2))$ değerine $X_2 = x_2$ verilmişken X_1 in koşullu beklenen değeri,

d) $E((X_1 - E(X_1/(X_2 = x_2)))^2/(X_2 = x_2))$ değerine $X_2 = x_2$ verilmişken X_1 in koşullu varyansı
denir.

Koşullu beklenen değerin en basit durumları için yapılan bu tanımlamalar daha genel durumlara da kolayca genişletilebilir.Yapılması gereken, beklenen değer ile ilgili verilen önceki tanımlarda olasılık (yoğunluk) fonksiyonları yerine koşullu olasılık (yoğunluk) fonksiyonlarını yazmaktır.

Örnek: (X_1,X_2,X_3) vektörünün olasılık yoğunluk fonksiyonu,

$$f(x_1,x_2,x_3) = \begin{cases} \frac{1}{2}e^{-x_3} & , \quad 0 \le x_1 + x_2 \le 2 \, , \, x_3 > 0 \\ 0 & , \quad d.y. \end{cases}$$

olsun. $x_1 \in (0,2)$ için $X_1 = x_1$ verilmişken (X_2,X_3) ün koşullu dağılımının olasılık yoğunluk fonksiyonu,

$$f_{X_2,X_3/(X_1=x_1)}(x_2,x_3) = \begin{cases} \dfrac{f(x_1,x_2,x_3)}{f_{X_1}(x_1)} & , \quad 0 \le x_2 \le 2-x_1 \ , \ x_3 > 0 \\ \\ 0 & , \quad d.y. \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \dfrac{e^{-x_3}}{(2-x_1)} & , \quad 0 \le x_2 \le 2-x_1, \ x_3 > 0 \\ \\ 0 & , \quad d.y. \end{cases}$$

dır. Örneğin $X_1 = 1$ verilmişken (X_2,X_3) ün koşullu olasılık yoğunluk fonksiyonu,

$$f_{X_2,X_3/(X_1=1)}(x_2,x_3) = \begin{cases} e^{-x_3} & , \quad 0 \le x_2 \le 1, \ x_3 > 0 \\ \\ 0 & , \quad d.y. \end{cases}$$

dır. Buna göre,

$$E((X_2X_3)/(X_1 = 1)) = \int_0^1\int_0^\infty x_2x_3e^{-x_3}dx_3dx_2$$

$$= \int_0^1 x_2dx_2 \int_0^\infty x_3e^{-x_3}dx_3 = 1/2$$

$$E((X_2+X_3)/(X_1 = 1)) = \int_0^1\int_0^\infty (x_2+x_3)e^{-x_3}dx_3dx_2$$

$$= \int_0^1 x_2 \int_0^\infty e^{-x_3}dx_3 + \int_0^1 dx_2 \int_0^\infty x_3e^{-x_3}dx_3 = 3/2$$

$$E(X_2/(X_1 = 1)) = \int_0^1\int_0^\infty x_2e^{-x_3}dx_3dx_2 = 1/2$$

$$E(X_3/(X_1 = 1)) = \int_0^1\int_0^\infty x_3e^{-x_3}dx_3dx_2 = 1$$

elde edilir. Ayrıca,

$$E((X_2+X_3)/(X_1 = 1)) = E(X_2/(X_1 = 1)) + E(X_3/(X_1 = 1))$$

olduğuna dikkat edin.

$X_1 \le 1$ verilmişken (X_1,X_2,X_3) ün koşullu olasılık yoğunluk fonksiyonu,

$$f_{X_1,X_2,X_3/(X_1\le 1)}(x_1,x_2,x_3) = \begin{cases} \dfrac{\frac{1}{2}e^{-x_3}}{P(X_1 \le 1)} &, \quad 0 \le x_1 + x_2 \le 2 \\ & \quad x \le 1,\ x_3 > 0 \\ 0 &, \quad d.y. \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \frac{2}{3}e^{-x_3} &, \quad 0 \le x_1 + x_2 \le 2 \\ & \quad x \le 1,\ x_3 > 0 \\ 0 &, \quad d.y. \end{cases}$$

ve $X_1 \le 1$ verilmişken X_2 nin koşullu (marjinal) olasılık yoğunluk fonksiyonu,

$$f_{X_2/(X_1\le 1)}(x_2) = \begin{cases} \frac{2}{3} &, \quad 0 \le x_2 \le 1 \\ \frac{2}{3}(2-x_2) &, \quad 1 < x_2 < 2 \\ 0 &, \quad d.y. \end{cases}$$

olmak üzere,

$$E(X_2/(X_1 \le 1)) = \frac{2}{3}\int_0^1 x_2 dx_2 + \frac{2}{3}\int_1^2 x_2(2-x_2)dx_2 = 7/9$$

dır.

$X_1 = x_1$ ve $X_3 = x_3$ $(0 < x_1 < 2\ ,\ x_3 > 0)$ verilmişken X_2 nin koşullu olasılık yoğunluk fonksiyonu,

$$f_{X_2/(X_1=x_1,X_3=x_3)}(x_2) = \begin{cases} \dfrac{\frac{1}{2}e^{-x_3}}{\frac{1}{2}(2-x_1)e^{-x_3}} &, \quad 0 \le x_2 \le 2 - x_1 \\ 0 &, \quad \text{d.y.} \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \dfrac{1}{2-x_1} &, \quad 0 \le x_2 \le 2 - x_1 \\ 0 &, \quad \text{d.y.} \end{cases}$$

olmak üzere, örneğin $X_1 = 1$ ve X_3=1 için,

$$E(X_2/(X_2 = 1, X_3 = 1)) = \int_0^1 x_2 dx_2 = 1/2$$

dir. $0 < x_1 < 2$ ve $x_3 > 0$ için $X_1 = x_1,\ X_3 = x_3$ verilmişken X_2 nin koşullu beklenen değeri,

$$E(X_2/(X_1 = x_1, X_3 = x_3)) = \int_0^{2-x_1} x_2 \frac{1}{2-x_1} dx_2 = \frac{2-x_1}{2}$$

dır.

Teorem: $a, b \in \mathbf{R}$, (X, Y, Z) bir rasgele vektör olmak üzere:

a) $E(aY + b/(X = x)) = aE(Y/(X = x)) + b$

b) $E(Y + Z/(X = x) = E(Y/(X = x)) + E(Z/(X = x))$

c)
$E((Y-a)^2/(X = x)) = E([Y - E(Y/(X = x))]^2/(X = x)) + [E(Y/(X = x)) - a]^2$

dır.

İspat: (Ödev)

Örnek: (X, Y) nin olasılık yoğunluk fonksiyonu,

$$f(x,y) = \begin{cases} x + y & , \quad 0 < x < 1 \,,\, 0 < y < 1 \\ 0 & , \quad \text{d.y.} \end{cases}$$

olsun. $x \in (0,1)$ için $X = x$ verilmişken Y nin koşullu beklenen değeri,

$$\begin{aligned} E(Y/(X = x)) &= \int_0^1 y f_{Y/(X=x)}(y) dy \\ &= \int_0^1 y \frac{f(x,y)}{f_X(x)} dy \\ &= \int_0^1 y \frac{x + y}{(x + 1/2)} dy \\ &= \frac{3x + 2}{6x + 3} = \frac{x + 2/3}{2x + 1} \end{aligned}$$

dır. X in verilmiş x değeri için $E(Y/(X = x))$ bir sayıdır. Ancak

$$g : (0,1) \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \rightarrow g(x) = E(Y/(X = x)) = \frac{x + 2/3}{2x + 1}$$

dönüşümü yardımıyla tamamlanan $E[Y/X] = g(X)$ fonksiyonu bir rasgele değişkendir. Şimdi bu rasgele değişkenin beklenen değerini bulalım.

$$E(E[Y/X]) = E(g(X)) = \int_0^1 g(x) f_X(x) dx$$

$$= \int_0^1 \frac{x + 2/3}{2x + 1}(x + 1/2) dx$$

$$= \int_0^1 \frac{x + 2/3}{2} dx = 7/12$$

Diğer taraftan $E(Y) = 7/12$ dir. Bu sonucu genel halde ispatlayalım.

Teorem: (X, Y) iki boyutlu bir rasgele vektör olmak üzere,

$$E(Y) = E(E[Y/X])$$

dır.

İspat: İspatı sürekli rasgele değişkenler için verelim.

$$E(E[Y/X]) = \int_{-\infty}^{\infty} E(Y/(X = x)) f_X(x) dx$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} y f_{Y/(X=x)}(y) f_X(x) dy dx$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} y f(x, y) dy dx = E(Y)$$

dır.

Bu teoremin bir sonucu olarak,

$$Var(Y) = E(Y^2) - (EY)^2 = E(E[Y^2/X]) - \{E(E[Y/X])\}^2$$

yazılabilir.

Bir rasgele değişkenin beklenen değerinin veya varyansının bulunmasında ikinci bir rasgele değişken ile koşullandırılarak yapılan hesaplama birçok yerde kolaylık sağlamaktadır.

Örnek: Belli bir atıcı için hedefi vurma olasılığı p, $(0 < p < 1)$ olsun. Atıcı, hedef ilk isabetini alıncaya kadar atışlar yapmaya kararlıdır. Atışların birbirinden bağımsız olduğu varsayımı altında atıcının yapacağı atışların sayısının beklenen değeri nedir?

Y, gerekli atışların sayısı $(y = 1, 2, \dots)$

X, birinci atıştaki isabet sayısı, $(x = 0, 1)$

olsun.

$$E(Y) = E(E[Y/X])$$

$$= E(Y/(X = 0))P(X = 0) + E(Y/(X = 1))P(X = 1)$$

$$= (1-p)E(Y/(X = 0)) \ + pE(Y/(X = 1))$$

ve

$$E(Y/(X = 0)) \ = 1 + E(Y),\ E(Y/(X = 1)) \ = 1$$

olmak üzere,

$$E(Y) = 1 - p + (1-p)E(Y) + p$$

den

$$E(Y) = \frac{1}{p}$$

bulunur.

Örnek: $(0,1)$ arlığında gelişigüzel bir sayı (X) seçildikten sonra $(x,1)$ aralığından gelişigüzel bir sayı (Y) seçilmektedir. Burada gelişigüzel sözcüğü ile kastedilen X ve $Y_{/(X=x)}$ nin olsılık yoğunluk fonksiyonlarının,

$$f_X(x) = \begin{cases} 1 & , \quad 0 \le x \le 1 \\ 0 & , \quad d.y. \end{cases} \quad , \quad f_{Y/(X=x)}(y) = \begin{cases} \dfrac{1}{1-x} & , \quad x \le y \le 1 \\ 0 & , \quad d.y. \end{cases}$$

biçiminde olmasıdır.

$$E(Y) = E(E[Y/X])$$

ve

$$E(Y/(X = x)) = \int_x^1 y\frac{1}{1-x}dy = \frac{1+x}{2}$$

$$E[Y/X] = \frac{1+X}{2}$$

olmak üzere,

$$E(Y) = E\left(\frac{1+X}{2}\right)$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{2}E(X)$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\int_0^1 xdx$$

$$= \frac{3}{4}$$

elde edilir.

$E[Y/X]$ nin bir rasgele değişken olarak yorumlanmasına benzer biçimde; $X = x$ verilmişken $Var(Y/(X = x))$ bir reel sayı olmak üzere, $g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $g(x) = Var(Y/(X = x))$ yardımıyla tanımlanan $Var[Y/X] = g(X)$, X in bir fonksiyonu olan bir rasgele değişkendir.

Teorem: (X, Y) iki boyulu bir rasgele vektör olmak üzere,

$$Var(Y) = E(Var[Y/X]) + Var(E[Y/X])$$

dır.

İspat:

$$Var(Y) = E(Y - EY)^2 = E(E[(Y - EY)^2/X])$$

olmak üzere, Teorem 4.5.1 c) den, her $x \in D_X$ için,

$$\begin{aligned} E((Y - EY)^2/(X = x)) = \ & E(\{Y - E(Y/(X = x))\}^2/(X = x)) \\ & + \{E(Y/(X = x)) - EY\}^2 \end{aligned}$$

yani,

$$E[(Y - EY)^2/X] = E[\{Y - E[Y/X]\}^2/X] + \{E[Y/X] - EY\}^2$$

$$= Var[Y/X] + \{E[Y/X] - E(E[Y/X])\}^2$$

olduğundan,

$$Var(Y) = E(Var[Y/X]) + E\{E[Y/X] - E\{E[Y/X])\}^2$$

$$= E(Var[Y/X]) + Var(E[Y/X])$$

dır.

Örnek: N, değer kümesi doğal sayılar olan bir rasgele değişken, $X_1, X_2, \ldots, X_n, N$ rasgele değişkenleri bağımsız, X_i ler aynı dağılımlı ve

$$E(X_i) = E(X), \quad Var(X_i) = Var(X), \quad i = 1, 2, \ldots, n$$

olmak üzere,

$$Y = X_1 + X_2 + \cdots + X_N$$

rasgele değişkeni için,

$$E(Y/(N = n)) = E(X_1 + X_2 + \cdots + X_n) = nE(X)$$

$$Var(Y/(N = n)) = Var(X_1 + X_2 + \cdots + X_n) = nVar(X)$$

$$E[Y/N] = NE(X) \ , \ Var[Y/N] = NVar(X)$$

$$E(E[Y/N]) = E(NE(X)) \ = E(N)E(X)$$

$$E(Var[Y/N]) = E(NVar(X)) \ = E(N)Var(X)$$

dır. Y rasgele değişkenin beklenen değeri ve varyansı

$$E(Y) = E(N)E(X)$$

$$Var(Y) = E(Var[Y/N]) + Var(E[Y/N])$$

$$= E(N)E(X) + Var(N)(E(X))^2$$

olarak elde edlir.

Teorem: X ve Y bağımsız ise

$$E(Y/(X = x)) \ = E(Y)$$

dır.

İspat: Sürekli rasgele değişkenler için,

$$E(Y/(X = x)) = \int_{-\infty}^{\infty} y f_{Y/(X=x)}(y) dy$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} y f_Y(y) dy = E(Y)$$

ve kesikli rasgele değişkenleri için,

$$E(Y/(X = x)) = \sum_y y f_{Y/(X=x)}(y)$$

$$= \sum_y y f_Y(y) = E(Y)$$

dır.

Bu teoremden görüldüğü gibi X ve Y bağımsız ise,

$$g(x) = E(Y/(X = x))$$

olarak belirlenen g fonksiyonu bir sabit fonksiyondur ve her $x \in D_X$ için $g(x) = E(Y)$ dir. Böylece X ve Y bağımsız ise

$$E[Y/X] = E(Y)$$

dır.

Teorem: X ve Yortak dağılıma sahip rasgele değişkenler, $E(X^2) < \infty$, $E(h(X))^2 < \infty$, $h : D_X \subset \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ olmak üzere, $E(Y - h(X))^2$ değerini minimum yapan h fonksiyonu $h(x) = E(Y/(X = x)$ ile belirlenen fonksiyondur.

İspat: İspatı (X, Y) nin sürekli durumu için yapalım.

$$E(Y - h(X))^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (y - h(x))^2 f(x,y) dxdy$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (y - h(x))^2 f_X(x) f_{Y/(X=x)}(y) dxdy$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \left(f_X(x) \int_{-\infty}^{\infty} (y - h(x))^2 f_{Y/(X=x)}(y) dy \right) dx$$

Bu integrali h fonksiyonları üzerinden minimize etmek için, x in bir ifadesi olan,

$$E((Y - h(x))^2/(X = x)) = \int_{-\infty}^{\infty} (y - h(x))^2 f_{Y/(X=x)}(y) dy$$

integralini her x için minimum yapan h fonksiyonu bulmaya çalışalım. Verilmiş x değeri için $h(x)$ bir reel sayıdır.

$$\begin{aligned} E((Y - h(x))^2/(X = x)) &= E(\{Y - E(Y/(X = x))\}^2/(X = x)) \\ &\quad + (E(Y/(X = x)) - h(x))^2 \end{aligned}$$

olmak üzere, $h(x) = E(Y/(X = x))$ için $E((Y - h(x))^2/(X = x))$ minimuma ulaşmaktadır.

Böylece, $E(Y - h(x))^2$ değerini minimum yapan h fonksiyonu

$$h(x) = E(Y/(X = x))$$

ile belirlenen fonksiyondur.

Alışılagelmiş olarak,

$$h(x) = E(Y/(X = x))$$

ifadesine (fonksiyonuna) Y nin X üzerindeki regresyon denklemi denilmektedir.

Örnek: (X, Y) nin olasılık yoğunluk fonksiyonu,

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{2}{\pi} & , \quad (x,y) \in \{(a,b) \in \mathbf{R}^2 : a^2+b^2 \le 1 , b \ge 0\} \\ 0 & , \quad \text{d.y.} \end{cases}$$

olsun.

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{2}{\pi}\sqrt{1-x^2} & , \quad -1 \le x \le 1 \\ 0 & , \quad \text{d.y.} \end{cases}$$

$$f_Y(y) = \begin{cases} \frac{4}{\pi}\sqrt{1-y^2} & , \quad 0 \le y \le 1 \\ 0 & , \quad \text{d.y.} \end{cases}$$

$y \in (0,1)$ için,

$$f_{X/(Y=y)}(x) = \begin{cases} \frac{1}{2\sqrt{1-y^2}} & , \quad -\sqrt{1-y^2} \le x \le \sqrt{1-y^2} \\ 0 & , \quad \text{d.y.} \end{cases}$$

$x \in (-1,1)$ için,

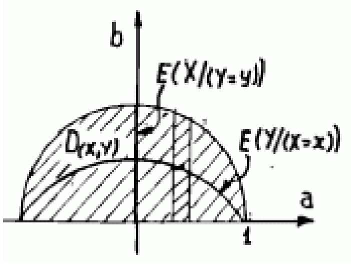
$$f_{Y/(X=x)}(y) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} & , \quad 0 \le y \le \sqrt{1-x^2} \\ 0 & , \quad \text{d.y.} \end{cases}$$

olmak üzere,

$$E(Y/(X=x)) = \int_0^{\sqrt{1-x^2}} y\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dy = \frac{\sqrt{1-x^2}}{2}$$

$$E(X/(Y=y)) = \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} x\frac{1}{\sqrt{1-y^2}}dx = 0$$

dır. Regresyon denklemlerinin belirlediği eğriler aşağıdaki şekilde gösterilmiştir.



Örnek: (X,Y) nin olasılık yoğunluk fonksiyonu,

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{1}{2} & , \quad (x,y) \in \{(a,b) \in \mathbf{R}^2 \,:\, 0 < b < a < 2\} \\ 0 & , \quad \text{d.y.} \end{cases}$$

olsun.

$$f_X(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{2} & , \quad 0 < x < 2 \\ 0 & , \quad \text{d.y.} \end{cases} \quad , \quad f_Y(y) = \begin{cases} \dfrac{2-y}{2} & , \quad 0 < y < 2 \\ 0 & , \quad \text{d.y.} \end{cases}$$

olmak üzere $x \in (0,2)$ için,

$$f_{Y/(X=x)}(y) = \begin{cases} \dfrac{1}{x} & , \quad 0 < y < x \\ 0 & , \quad \text{d.y.} \end{cases}$$

$y \in (0,2)$ için,

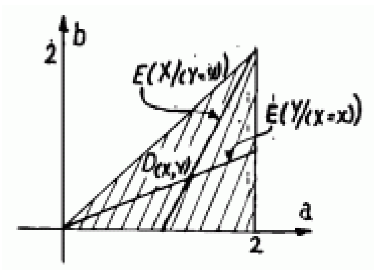
$$f_{X/(Y=y)}(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2-y} & , \quad y < x < 2 \\ 0 & , \quad \text{d.y.} \end{cases}$$

ve

$$E(Y/(X=x)) = \int_0^x y \frac{1}{x} dy = \frac{x}{2}$$

$$E(X/(Y=y)) = \int_y^2 x \frac{1}{2-y} dx = \frac{y+2}{2}$$

dır. Regresyon denklemlerinin belirlediği eğriler (doğrular) aşağıdaki şekilde gösterilmiştir.



Örnek: (X, Y) nin olasılık fonksiyonu,

$$f(x,y) = \frac{1}{15},\ (x,y) \in \{(0,0),(1,0),(2,0),(3,0),(4,0),(1,1),(2,1),(3,1),$$

$$(4,1),(2,2),(3,2),(4,2),(3,3),(4,3),(4,4)\}$$

olsun.

$$f_X(x) = \frac{x+1}{15}, \quad x = 0,1,2,3,4$$

$$f_Y(y) = \frac{5-y}{15}, \quad y = 0,1,2,3,4$$

olmak üzere, $x \in \{0,1,2,3,4\}$ için,

$$f_{Y/(X=x)}(y) = \frac{1}{x+1}, \quad y = 0,1,\ldots,x$$

$$E(Y/(X = x)) = \sum_{y=0}^{x} y\frac{1}{x+1} = \frac{x}{2}$$

ve $y \in \{0,1,2,3,4\}$ için,

$$f_{X/(Y=y)}(x) = \frac{1}{5-y}, \quad x = y, y+1,\ldots,4$$

$$E(X/(Y = y)) = \sum_{x=y}^{4} x\frac{1}{5-y} = \frac{y+4}{2}$$

dır

Eğer h fonksiyonu x in lineer bir ifadesi, yani

$$h(x) = E(Y/(X = x)) = a + bx \quad (a,b \in \mathbb{R})$$

biçiminde alınrsa, $E(Y - h(X))^2$ nin h üzerinden minimizasyonu problemi,

$$Q(a,b) = E(Y - (a + bX))^2$$

nin a ve b üzerinden minimizasyonuna dönüşmektedir. Bir an için b nin tesbit edilmiş olduğunu varsayalım. O zaman $E(Y - bX - a)^2$ yi minimum yapan a değeri,

$$a = E(Y - bX) = EY - bEX$$

olur.

Böyle belirlenmiş a ile

$$E(Y - a - bX^2) = E\{(Y - EY) - b(X - EX)\}^2$$

$$= \sigma_Y^2 - 2\rho_{X,Y}\sigma_X\sigma_Y b + \sigma_X^2 b^2$$

dır. Bu ifadeyi minimum yapan b değeri,

$$b = \rho_{X,Y}\frac{\sigma_Y}{\sigma_X}$$

dır. Buradan,

$$a = EY - \rho_{X,Y}\frac{\sigma_Y}{\sigma_X}EX$$

bulunur. Bu durumda $E(Y-(a+bX))^2$ nin alabileceği minimum değer,

$$\min_{a,b} E(Y-(a+bX))^2 = \sigma_Y^2 - 2\rho_{X,Y}\sigma_X\sigma_Y(\rho_{X,Y}\frac{\sigma_Y}{\sigma_X}) + \sigma_X^2(\rho_{X,Y}\frac{\sigma_Y}{\sigma_X})^2$$

$$= \sigma_Y^2(1-2\rho_{X,Y}^2)$$

dır.

Koşullu beklenen değerin kullanıldığı yerlerden bir başkası koşullandırılarak yapılan olasılık hesabıdır. A, bir $(\Omega,\mathcal{U},P)$ olasılık uzayında bir olay ve

$$I_A(\omega) = \begin{cases} 1 & , \quad \omega \in A \\ 0 & , \quad \omega \in A \end{cases}$$

olmak üzere $X = I_A$ rasgele değişkenini göz önüne alalım. $E(X) = P(A)$ ve herhangi bir Y rasgele değişkeni için,

$$E(X/(Y=y) = P(A/(Y=y)) \ , \ (P(Y=y) \neq 0)$$

dır. Buradan,

$$P(A) = E(X) = E(E[X/Y])$$

$$= \sum_y E(X/(Y=Y))f_Y(y)$$

$$= \sum_y P(A/(Y=y))f_Y(y)$$

yazılır. Y nin sürekli olması durumunda da,

$$P(A) = \int_{-\infty}^{\infty} P(A/(Y=y))f_Y(y)dy$$

yazılabilir.

Örnek: X ve Y bağımsız ve sürekli rasgele değişkenler olsun. $P(X<Y)$ olasılığı için,

$$P(X < Y) = \int_{-\infty}^{\infty} P((X < Y)/(Y = y))f_Y(y)dy$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} P((X < y)/(Y = y))f_Y(y)dy$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} P(X < y)f_Y(y)dy$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} F_X(y)f_Y(y)dy$$

ve $P(X + Y < a),\ a \in \mathbf{R}$ olasılığı için,

$$P(X + Y < a) = \int_{-\infty}^{\infty} P((X + Y < a)/(Y = y))f_Y(y)dy$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} P((X + y < a)/(Y = y))f_Y(y)dy$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} P(X < a + y)f_Y(y)dy$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} F_X(a + y)f_Y(y)dy$$

dır.

PROBLEMLER

1. Olasılık fonksiyonları aşağıda verilen dağılımların birinci, ikinci, üçüncü momentlerini, beklenen değerlerini ve varyanslarını bulunuz.

   a) $f(x) = 1/5\ ,\quad x = -2, -1, 0, -1, 2$

   b) $f(x) = 1/5\ ,\quad x = 0, 1, 2, 3, 4$

c) $f(x) = \frac{1}{16}\binom{4}{x}$, $x = 0,1,2,3,4$

d) $f(x) = \binom{4}{x}\left(\frac{1}{4}\right)^{x}\left(\frac{3}{4}\right)^{4-x}$, $x = 0,1,2,3,4$

e) $f(x) = \binom{4}{x+2}\left(\frac{1}{4}\right)^{x+2}\left(\frac{3}{4}\right)^{2-x}$, $x = -2,-1,0,1,2$

f) $f(x) = \frac{|x|}{6}$, $x = -2,-1,0,1,2$

g) $f(x) = \frac{1}{10}(x+2)$, $x = -2,-1,0,1,2$

2. Olasılık yoğunluk fonksiyonları aşağıda verilen dağılımların birinci, ikinci, üçüncü momentlerini, beklenen değerlerini ve varyanslarını bulunuz.

a) $f(x) = \begin{cases} 1/4 & , \quad -2 \le x \le 2 \\ 0 & , \quad d.y. \end{cases}$

b) $f(x) = \begin{cases} 1/4 & , \quad 0 \le x \le 4 \\ 0 & , \quad d.y. \end{cases}$

c) $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{4}(2-|x|) & , \quad -2 \le x \le 2 \\ 0 & , \quad d.y. \end{cases}$

d) $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{4}(2-|x-2|) & , \quad 0 \le x \le 4 \\ 0 & , \quad d.y. \end{cases}$

e) $$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{4}|x| & , \quad -2 \le x \le 2 \\ 0 & , \quad d.y. \end{cases}$$

f) $$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{8}(x+2) & , \quad -2 \le x \le 2 \\ 0 & , \quad d.y. \end{cases}$$

3. $1, 2, 3, 4, 5$ rakamları birer kağıt parçasına yazılıp bir kavanoza atılsın. Kavanozdan aynı anda üç tane kağıt parçası alındığında:

X –gelen sayılar arasında en küçüğü,

Y –gelen sayılar arasında en büyüğü,

U –gelen sayılar arasında ortancası,

V –gelen sayıların toplamı,

W –gelen sayıların en büyüğü ile en küçüğü arasındaki fark

olmak üzere, $E(X),\ E(Y),\ E(U),\ E(V),\ E(W)$ değerlerini bulunuz.

4. $1, 2, \ldots, n$ sayıları birer kâğıt parçasına yazılıp bir kavanoza atılsın.

a) Kavanozdan aynı anda r tane $(1 \le r \le n)$ kâğıt parçası alındığında gelen en küçük sayı X olsun.

$$E(X) = \frac{n+1}{r+1}$$

olduğunu gösteriniz.

b) Kavanozdan, çekileni yine yerine koyarak ard arda r tane kâğıt parçası çekildiğinde gelen en küçük sayı X olsun.

$$E(X) = 1 + \left(\frac{n-1}{n}\right)^r + \left(\frac{n-2}{n}\right)^r + \cdots + \left(\frac{1}{n}\right)^r$$

olduğunu gösteriniz.

5. X rasgele değişkenin olasılık fonksiyonu,

$$f(x) = pq^{x-1}, \quad x = 1,2,\ldots \left(p+q=1,\ 0<p<1\right)$$

olsun. X in k inci çarpımsal momentini bulunuz.

Yol gösterme:

$$\left[\sum_{x=1}^{\infty} x(x-1)\cdots(x-k+1)p^{x-1} = p^{k-1}\frac{d^k}{dp^k}\left(\sum_{x=1}^{\infty} p^x\right)\right]$$

6. Belli bir atıcı için, hedef ilk isabetini alıncaya kadar yaptığı atışların sayısı X rasgele değişkeni olsun. X in olasılık fonksiyonunun

$$f(x) = \frac{3}{5}\left(\frac{2}{5}\right)^{x-1}, \quad x = 1,2,\ldots$$

olduğu bilinsin. Bu atıcı, hedef ilk isabetini alıncaya kadar atış yapmaya kararlıdır. Harcanan her merminin değeri a ve kazanılan hedefin değeri b olduğuna göre atıcının kazancının beklenen değeri nedir?

7. X rasgele değişkenin olasılık fonksiyonu,

$$f(x) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!}, \quad x = 0,1,2,\ldots,\ (\lambda > 0)$$

olsun. X in k inci çarpımsal momentini bulunuz.

8. X rasgele değişkenin olasılık yoğunluk fonksiyonu,

$$f(x) = \begin{cases} \beta\alpha^{\beta}x^{-\beta-1} & , \quad x \geq \alpha,\ (\alpha,\beta > 0) \\ \\ 0 & , \quad d.y. \end{cases}$$

olsun. X in momentlerinin varlığını arştırınız.

9. X rasgele değişkenin olasılık yoğunluk fonksiyonu,

$$f(x) = \begin{cases} cx^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1} & , \quad 0 < x < 1,\ (\alpha,\beta > 0) \\ \\ 0 & , \quad d.y. \end{cases}$$

olsun. c sabitinin değerini bulunuz.

$$E(X^n) = \frac{\Gamma(\alpha+\beta)\Gamma(\alpha+n)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\alpha+\beta+n)}, \quad n = 1,2,\ldots$$

olduğunu gösteriniz ve $E(X)$ ile $Var(X)$ değerlerini bulunuz.

10. Bir X rasgele değişkenin beklenen değeri EX olsun. $c \in \mathbf{R}$ için,

$$E\left[(X-c)^2\right] = E\left[(X-EX)^2\right] + (EX-c)^2$$

olduğunu gösteriniz. $E\left[(X-c)^2\right]$ yi minimum yapan c değerini bulunuz.

11. X rasgele değişkenin olasılık yoğunluk fonksiyonu $x = c$ doğrusuna göre simetrik $\left(\forall x \in \mathbf{R}\right.$ için $\left.f(c+x) = f(c-x)\right)$ olsun. Mevcut olması halinde,

$$EX = c$$

ve

$$E\left[(X-c)^{2n-1}\right] = 0, \quad n = 1,2,\ldots$$

olduğunu gösteriniz.

12.

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{\pi}\int_0^T \frac{\sin at}{t}\,dt = \begin{cases} \frac{1}{2} & , \quad a > 0 \\ -\frac{1}{2} & , \quad a < 0 \end{cases}$$

olduğunu gösteriniz.
Yol gösterme:

$$\int_0^T \frac{\sin x}{x}\,dx = \int_0^T \sin x\left[\int_0^\infty e^{-ux}du\right]dx$$
$$= \int_0^\infty\left[\int_0^T \sin x e^{-ux}dx\right]du$$

13. X rasgele değişkenin olasılık fonksiyonu

$$f(x) = pq^{x-1},\ x = 1,2,\ldots \quad (p+q = 1,\ 0 < p < 1)$$

olsun. X in karakteristik fonksiyonunu bulunuz ve $E(X)$ ile $Var(X)$ değerlerini bu fonksiyon yardımıyla elde ediniz.

14. X rasgele değişkenin olasılık yoğunluk fonksiyonu,

$$f(x) = \frac{1}{2}e^{-|x|},\ -\infty < x < \infty$$

olsun. X in karakteristik fonksiyonunu bulunuz ve $E(X)$ ile $Var(X)$ değerlerini bu fonksiyon yardımıyla elde ediniz.

15. Sürekli X rasgele değişkenin karakteristik fonksiyonu,

$$\Phi_X(t) = e^{-|t|},\ t \in \mathbb{R}$$

olsun. X in olasılık yoğunluk fonksiyonunu bulunuz.

16. X rasgele değişkenin olasılık yoğunluk fonksiyonu

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2a} & , \quad -a < x < a \\ 0 & , \quad d.y. \end{cases}$$

olsun. X in karakteristik fonksiyonunu bulunuz.

17. Olasılık (yoğunluk) fonksiyonları aşağıda verilen dağılımlar için $M_X(t)$ ve $N_X(t)$ fonksiyonlarını bulunuz. Birinci ve ikinci dereceden momentleri, çarpımsal momentleri ve kümülantları hesaplayınız.

a) $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x, \quad x = 1, 2, \ldots$

b) $f(x) = \binom{n}{x}\left(\frac{1}{2}\right)^x \quad , x = 0, 1, 2, \ldots, n$

c) $f(x) = \begin{cases} xe^{-x} & , \quad x > 0 \\ 0 & , \quad d.y. \end{cases}$

d) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}, \quad -\infty < x < \infty, \ (\mu \in \mathbf{R}, \sigma > 0)$

18. Bir X rasgele değişkenin moment üreten fonksiyonu $M_X(t)$ olmak üzere

a) $M_X(0) = 1$

b) $M_{aX}(t) = M_X(at), \quad a \neq 0$

c) $M_{aX+b}(t) = e^{bt} M_X(at)$

olduğunu gösteriniz.

19. X rasgele değişkenin moment üreten fonksiyonu

$$M_X(t) = e^{2t+2t^2}$$

olmak üzere X in olasılık yoğunluk fonksiyonunu yazınız .

$$Y = \frac{X - EX}{\sqrt{Var(X)}}$$

rasgele değişkenin moment üreten fonksiyonunu ve buradan olasılık yoğunluk fonksiyonunu bulunuz.

20. X rasgele değişkenin moment üreten fonksiyonu

$$M_X(t) = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}e^t\right)^4$$

olsun. X in olasılık fonksiyonunu bulunuz.

21. X rasgele değişkenin olasılık yoğunluk fonksiyonu

$$f(x) = \begin{cases} 1 & , \quad 0 < x < 1 \\ 0 & , \quad d.y. \end{cases}$$

olsun. $Y = -\ln X$ rasgele değişkenin moment üreten fonksiyonunu ve buradan olasılık yoğunluk fonksiyonunu bulunuz. Y nin önce olasılık yoğunluk fonksiyonunu ve buradan moment üreten fonksiyonunu bulunuz.

22. X rasgele değişkenin olasılık fonksiyonu

$$f(x) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x},\ x = 0,1,2,\ldots,n,\ (0 < p < 1)$$

olmak üzere

$$M_X(t) = (1 - p + pe^t)^n$$

olduğunu gösteriniz. $E(X)$ ve $Var(X)$ değerlerini hesaplayınız.

23. (X_1, X_2, X_3) ün olasılık yoğunluk fonksiyonu,

$$f(x_1, x_2, x_3) = \begin{cases} \frac{1}{6} e^{-2x_1 - 3x_2 - x_3} & , \quad x_1 > 0,\ x_2 > 0,\ x_3 > 0 \\ \\ 0 & , \quad d.y. \end{cases}$$

olsun.

a) (X_1, X_2, X_3) ün moment üreten fonksiyonunu,

b) X_1, X_2 ve X_3 ün moment üreten fonksiyonlarını,

c) $E(X_1 X_2),\ E(X_1^2 X_2),\ E(X_1 + X_2 + X_3)$ değerlerini,

d) (X_1, X_2, X_3) ün varyans-kovaryans matrisini

bulunuz.

24. $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ nin olasılık fonksiyonu,

$$f(x_1, x_2, \dots x_n) = \frac{n!}{x_1! x_2! \cdots x_n!} p_1^{x_1} p_2^{x_2} \cdots p_n^{x_n},\ x_i = 0, 1,\ i = 1, 2, \dots, n$$

olsun.

a) $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ nin moment üreten fonksiyonunu,

b) $X_i,\ i = 1, 2, \dots, n$ nin moment üreten ve olasılık fonksiyonunu,

c) (X_i, X_j) nin moment üreten ve olasılık fonksiyonunu $i, j = 1, 2, \dots n,\ i \neq j$

d) $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ nin varyans-kovaryans ve korelasyon matrisini bulunuz.

25. (X_1, X_2) nin olasılık yoğunluk fonksiyonu,

$$f(x_1, x_2) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-p^2}} \left[\left(\frac{x_1-\mu_1}{\sigma_1}\right) - 2\rho \frac{(x_1-\mu_1)(x_2-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2} + \left(\frac{x_2-\mu_2}{\sigma_2}\right)^2 \right]$$

$-\infty < x_1 < \infty,\ -\infty < x_2 < \infty,\ (\mu_1, \mu_2 \in \mathbf{R},\ \sigma_1 > 0,\ \sigma_2 > 0,\ \rho \in (-1, 1))$
olsun.

a) (X_1, X_2) nin moment üreten fonksiyonunun

$$M_{X_1, X_2}(t_1, t_2) = e^{(\mu_1 t_1 + \mu_2 t_2 + \frac{\sigma_1^2 t_1^2 + 2\rho\sigma_1\sigma_2 t_1 t_2 + \sigma_2^2 t_2^2}{2})}$$

olduğunu gösteriniz. (X_1, X_2) nin varyans-kovaryans ve korelasyon matrisini bulunuz.

b) X_1 ve X_2 nin bağımsız olabilmesi için gerek ve yeter şartın $\rho = 0$ olması olduğunu gösteriniz.

26. $i, j = 1, 2, \dots, , n$ için $Cov(X_i, X_j)$ değerleri var olsun.
$a_k, b_k \in \mathbf{R},\ k = 1, 2, \dots, n,$ olmak üzere,

$$Cov\left(\sum_{i=1}^{n} a_i X_i, \sum_{j=1}^{n} a_j X_j\right) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_i b_j Cov(X_i, X_j)$$

olduğunu ispatlayınız. Özel olarak,

a) $Var\left(\sum_{i=1}^{n} a_i X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} a_i^2 Var(X_i) + 2 \sum\sum_{1 \le i < j \le n} a_i a_j Cov(X_i, X_j)$

b) $Var\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} Var(X_i) + 2 \sum\sum_{1 \le i < j \le n} Cov(X_i, X_j)$

c) $X_1, X_2, \ldots, X_n$ ler bağımsız ise

$$Var\left(\sum_{i=1}^{n} a_i X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} a_i^2 Var(X_i)$$

$$Var\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} Var(X_i)$$

d) $a, b, c \in \mathbf{R}$ için

$$Var(aX_1 + bX_2 + c) = a^2 Var(X_1) + b^2 Var(X_2) + 2ab Cov(X_1, X_2)$$

$$Var(X_1 + X_2) = Var(X_1) + Var(X_2) + 2Cov(X_1, X_2)$$

$$Var(X_1 - X_2) = Var(X_1) + Var(X_2) - 2Cov(X_1, X_2)$$

e) $a, b, c, d \in \mathbf{R}$ için

$$Cov(aX_1 + b, cX_2 + d) = ac Cov(X_1, X_2)$$

$$Cov(aX_1 + bX_2 + c, X_3) = a Cov(X_1, X_3) + b Cov(X_2, X_3)$$

olduğunu gösteriniz.

27. Ortak dağılıma sahip X ve Y rasgele değişkenleri sonlu varyanslı ve

$$U = aX + b$$
$$V = cY + d$$

$a, b, c, d \in \mathbf{R},\ a \neq 0,\ c \neq 0$ olsun:

a) $ac > 0$ için $\rho_{X,Y} = \rho_{U,V}$

b) $ac < 0$ için $\rho_{X,Y} = -\rho_{U,V}$

olduğunu gösteriniz.

28. X ve Y ortak dağılıma sahip sonlu varyanslı iki rasgele değişken ve

$$U = X + Y$$
$$V = X - Y$$

olmak üzere;

a) $Var(X) = Var(Y)$ ise $\rho_{U,V} = 0$

b) $Cov(X,Y) = 0$ ise $\rho_{U,V} = \dfrac{Var(X) - Var(Y)}{\sqrt{Var(X) + Var(Y)}}$

olduğunu gösteriniz.

29. $X_1, X_2, \ldots, X_n$ bağımsız ve aynı dağılımlı rasgele değişkenler olsun. $E(X_i) = \mu$, $Var(X_i) = \sigma^2 < \infty$ olmak üzere,

$$Y = \sum_{i=1}^{n} a_i X_i$$

rasgele değişkeninin beklenen değeri $E(Y) = \mu$ ve varyansı, $(Var(Y))$ minimum olacak şekilde $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbf{R}$ katsayılarını belirleyiniz.

30. $E(XY) = 0$ olduğunda X ve Y ye ortogonaldir denir. X ve Y ortogonal ise,

$$E[(X+Y)^2] = E(X^2) + E(Y^2)$$

olduğunu gösteriniz.

31. X rasgele değişkenin olasılık yoğunluk fonksiyonu,

a) $f(x) = \begin{cases} 1/2 & , \quad 0 < x < 2 \\ 0 & , \quad \text{d.y.} \end{cases}$

b) $f(x) = \begin{cases} e^{-x} & , \quad x > 0 \\ 0 & , \quad \text{d.y.} \end{cases}$

c) $f(x) = \begin{cases} x^{-2} & , \quad x > 1 \\ 0 & , \quad \text{d.y.} \end{cases}$

olsun. $E(X/(X>1))$ koşullu beklenen değerinin varlığını araştırınız ve var olması halinde bulunuz.

32. (X,Y) nin olasılık yoğunluk fonksiyonu,

$$f(x,y) = \begin{cases} c(x+y) & , \quad 0<x<y<1 \\ 0 & , \quad d.y. \end{cases}$$

olsun. c sabitini ve $x,y \in (0,1)$ için $E(X/(Y=y))$ ile $E(Y/(X=x))$ koşullu beklenen değerlerini bulunuz.

33. (X,Y) nin olasılık fonksiyonu,

$$f(x,y) = c(x+y),\ (x,y) \in \{(0,0),(0,1),(1,0),\ (1,2),(1,3),(2,2)\}$$

olsun. c sabitinin değerini ve $y=0,1,2,3$ için $E(X/(Y=y))$ ve $x=0,1,2$ için $E(Y/(X=x))$ değerlerini hesaplayınız.

34. (X,Y) nin olasılık fonksiyonu,

$$f(x,y) = \frac{e^{-\lambda_1-\lambda_2}\lambda_1^x\lambda_2^y}{x!y!}, \quad x,y = 0,1,2,\ldots$$

olsun $(\lambda_1>0,\lambda_2>0)$. $n \in N$ için $X+Y=n$ verilmişken X in koşullu olasılık fonksiyonunu bulunuz.

35.

$$E(u(X)/X) = u(X)$$

$$E(Xu(Y)/(Y=y)) = u(y)E(X/(Y=y))$$

$$E(g(X,Y)/(Y=y)) = E(g(X,y)/(Y=y))$$

$$E(XY) = E(YE(X/Y))$$

olduğunu gösteriniz.

36. $h = a+bx,\ a,b \in \mathbf{R}$ için,

$$Q(a,b) = E(Y-h(X))^2$$

fonksiyonunu minimum yapan a,b değerlerini,

$$\begin{cases} \dfrac{\partial Q(a,b)}{\partial a} = 0 \\[2ex] \dfrac{\partial Q(a,b)}{\partial b} = 0 \end{cases}$$

denklem sisteminin (normal denklemlerin) bir çözümü olarak yeniden elde ediniz.

37. $(Y, X_1, X_2, \ldots, X_n)$, $(n+1)$ – boyutlu bir rasgele değişken ve

$$h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$$

$E(Y^2) < \infty$, $E\{h(X_1, \ldots, X_n)\}^2 < \infty$ olmak üzere $E(Y - h(X_1, \ldots, X_n))^2$ değerini minimum yapan h fonksiyonunun,

$$h(x_1, x_2, \ldots, x_n) = E(Y/(X_1 = x_1, X_2 = x_2, \ldots, X_n = x_n))$$

ile belirlendiğini gösteriniz.

$$h(X_1, X_2, \ldots, X_n) = \beta_0 + \beta_1 X_1 + \beta_2 X_2 + \cdots + \beta_n X_n$$

olması durumunda $\beta_0, \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$ katsayılarını belirleyen normal denklemleri bulunuz.