SORU 1 Aşağıdaki boşluklar öğrenci tarafından doldurulacaktır. (Puan Hariç)

Soyadı:	Adı:	Grup No:	Sıra No:	Puan
İmza:	Elektronik Posta(e-mail) adresi:	Öğrenci No:		

Lütfen bu soruyu bu kağıdın ön yüzünü ve gerekirse arka yüzünü kullanarak cevaplayınız.

[20p]

$$x^2y'' + (1+x)y' + 3\ln(x)y = 0, \quad x > 0, \quad y(1) = 2, \; y'(1) = 0$$

başlangıç değer probleminin bir çözümü $\phi(x)$ olsun.

a) $\phi''(1)$, $\phi'''(1)$ ve $\phi^{iv}(1)$ değerlerini bulunuz. (**İPUCU**: Verilen $\phi(1)$ ve $\phi'(1)$ değerlerini diferansiyel denklemde yerine koyarak $\phi''(1)$ değerini hesaplayınız.)

b) $\phi(x)$ çözümünün Taylor açılımı $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-1)^n$ olsun. Bu durumda a_0, a_1, a_2, a_3, a_4 değerlerini bulunuz.

a) $y = \phi(x) \Rightarrow y(1) = \phi(1) = 2$ and $y'(1) = \phi'(1) = 0$

$x^2\phi''(x) + (1+x)\phi'(x) + 3\ln x\,\phi(x) = 0 \quad (1)$

$x = 1 \Rightarrow \phi''(1) + 0 + 0 = 0 \Rightarrow \phi''(1) = 0$

By differentiating (1), we will obtain

$x^2\phi'''(x) + (1+3x)\phi''(x) + (1+3\ln x)\phi'(x) + \frac{3}{x}\phi(x) = 0 \quad (2)$

$x = 1 \Rightarrow \phi'''(1) + 0 + 0 + 3.2 = 0 \Rightarrow \phi'''(1) = -6$

By differentiating (2), we will obtain

$x^2\phi^{IV}(x) + (1+5x)\phi'''(x) + (4+3\ln x)\phi''(x) + \frac{6}{x}\phi'(x) - \frac{3}{x^2}\phi(x) = 0$

$x = 1 \Rightarrow \phi^{IV}(1) + 6.(-6) + 0 + 0 - 3.2 = 0 \Rightarrow \phi^{IV}(1) = 42$

b) $\phi^{(m)}(x_0) = m!\,a_m$

$\phi(1) = a_0 \Rightarrow a_0 = 2$

$\phi'(1) = a_1 \Rightarrow a_1 = 0$

$\phi''(1) = 2!\,a_2 \Rightarrow a_2 = 0$

$\phi'''(1) = 3!\,a_3 \Rightarrow a_3 = -1$

$\phi^{IV}(1) = 4!\,a_4 \Rightarrow a_4 = 7/4$

SORU 2 Aşağıdaki boşluklar öğrenci tarafından doldurulacaktır. (Puan Hariç)

Soyadı:	Adı:	Grup No:	Sıra No:	Puan
İmza:	Elektronik Posta(e-mail) adresi:	Öğrenci No:		

Lütfen bu soruyu bu kağıdın ön yüzünü ve gerekirse arka yüzünü kullanarak cevaplayınız.

[25pt] Aşağıdaki diferansiyel denklem için

$$x^2y'' + xy' + (x-4)y = 0$$

a) $x = 0$ noktasının düzgün tekil nokta olduğunu gösteriniz.
b) İndisyel denklemi ve köklerini belirleyiniz.
c) $x > 0$ için büyük köke karşılık gelen seri çözümünü bulunuz.

a) $P(x) = x^2,\ Q(x) = x,\ R(x) = x-4 \Rightarrow P(0) = 0$

$$\left.\begin{aligned} &\lim_{x\to 0} x\cdot\frac{Q(x)}{P(x)} = \lim_{x\to 0} x\,\frac{\cancel{x}}{\cancel{x^2}} = 1 \\ &\lim_{x\to 0} x^2\,\frac{R(x)}{P(x)} = \lim_{x\to 0} \cancel{x^2}\,\frac{x-4}{\cancel{x^2}} = -4 \end{aligned}\right\}$$ $x=0$ is a regular singular point

b) $y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{r+n} \Rightarrow y' = \sum_{n=0}^{\infty} (r+n) a_n x^{r+n-1} \Rightarrow y'' = \sum_{n=0}^{\infty} (r+n)(r+n-1) a_n x^{r+n-2}$

By substituting y, y' and y'' into the equation, we get

$$\sum_{n=0}^{\infty} (r+n)(r+n-1) a_n x^{r+n} + \sum_{n=0}^{\infty} (r+n) a_n x^{r+n} - 4\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{r+n} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{r+n+1} = 0$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left[(r+n)^2 - 4\right] a_n x^{r+n} + \sum_{n=1}^{\infty} a_{n-1} x^{r+n} = 0$$

$$\underbrace{(r^2-4) a_0}_{=0 \text{ indicial equation}} x^r + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \left[(r+n)^2 - 4\right] a_n + a_{n-1} \right\} x^{r+n} = 0$$

$r^2 - 4 = 0 \Rightarrow r^2 = 4 \Rightarrow r_{1,2} = \pm 2$

c) $r=2 \Rightarrow \left[(2+n)^2-4\right]a_n + a_{n-1} = 0$

$$\Rightarrow a_n = -\frac{a_{n-1}}{n\cdot(n+4)} \quad , (n \geqslant 1)$$

$$n=1 \Rightarrow a_1 = -\frac{a_0}{1\cdot 5}$$

$$n=2 \Rightarrow a_2 = -\frac{a_1}{2\cdot 6} = \frac{a_0}{1\cdot 2\cdot 5\cdot 6}$$

$$n=3 \Rightarrow a_3 = -\frac{a_2}{3\cdot 7} = -\frac{a_0}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 5\cdot 6\cdot 7}$$

$$a_n = (-1)^n \frac{4!}{n!\,(n+4)!}\, a_0 \quad , (n \geqslant 1)$$

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{2+n}$$

$$= a_0 \underbrace{\left[1 + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{4!}{n!\,(n+4)!} x^n\right] x^2}_{=y_1}$$

SORU 3 Aşağıdaki boşluklar öğrenci tarafından doldurulacaktır. (Puan Hariç)

Soyadı:	Adı:	Grup No:	Sıra No:	Puan
İmza:	Elektronik Posta(e-mail) adresi:	Öğrenci No:		

Lütfen bu soruyu bu kağıdın ön yüzünü ve gerekirse arka yüzünü kullanarak cevaplayınız.

[15pt] a) Aşağıdaki şekilde tanımlanmış $f(t)$ fonksiyonunun Laplace dönüşümünü bulunuz.

$$f(t) = \begin{cases} 0, & t < 5 \\ te^t, & t \geq 5 \end{cases}$$

[15pt] b) Aşağıdaki başlangıç değer problemini çözünüz.

$$y'' + 4y' + 5y = \delta(t-\pi)\cos t, \quad y(0) = 1, \; y'(0) = 0.$$

Laplace Dönüşüm Tablosu

$e^{at}\sin bt$	$\dfrac{b}{(s-a)^2+b^2}$, $s > a$	$\delta(t-c)f(t)$	$e^{-cs}f(c)$, if f is continous
$e^{at}\cos bt$	$\dfrac{s-a}{(s-a)^2+b^2}$, $s > a$	$u_c(t)f(t-c)$	$e^{-cs}F(s)$
$t^n e^{at}, n = 0,1,2,...$	$\dfrac{n!}{(s-a)^{n+1}}$, $s > a$	$e^{ct}f(t)$	$F(s-c)$
$u_c(t)$	$\dfrac{e^{-cs}}{s}$, $s > 0$	$f^{(n)}(t)$	$s^nF(s) - s^{n-1}f(0) - \cdots - f^{(n-1)}(0)$

a) $f(t) = te^t \begin{cases} 0, & t < 5 \\ 1, & t \geqslant 5 \end{cases} = te^t u_5(t)$

$\mathcal{L}\{f(t)\} = \mathcal{L}\{te^t u_5(t)\} \Rightarrow f(t-5) = te^t \Rightarrow f(t) = (t+5)e^{t+5}$

$= e^{-5s} F(s)$

$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\} = \mathcal{L}\{(t+5)e^{t+5}\}$

$= e^5 \left[\mathcal{L}\{te^t\} + \mathcal{L}\{5e^t\}\right] = e^5 \left[\frac{1}{(s-1)^2} + \frac{5}{s-1}\right]$

$\mathcal{L}\{f(t)\} = e^{-5(s-1)} \dfrac{5s-4}{(s-1)^2}$

b) $\mathcal{L}\{y'' + 4y' + 5y\} = \mathcal{L}\{\delta(t-\pi) . \cos t\}$

$$s^2 \mathcal{L}\{y\} - s\cancelto{1}{y(0)} - \cancelto{0}{y'(0)} + 4\left[s\,\mathcal{L}\{y\} - \cancelto{1}{y(0)}\right] + 5\mathcal{L}\{y\} = e^{-\pi s} \cos\pi$$

$$\underbrace{(s^2 + 4s + 5)}\,\mathcal{L}\{y\} = s + 4 - e^{-\pi s}$$

$$s^2 + 4s + 4 + 1 = (s+2)^2 + 1$$

$$\mathcal{L}\{y\} = \frac{s + 4 - e^{-\pi s}}{(s+2)^2 + 1}$$

$$y = \mathcal{L}^{-1}\left\{ \frac{s+2}{(s+2)^2+1} + \frac{2}{(s+2)^2+1} - e^{-\pi s} \underbrace{\frac{1}{(s+2)^2+1}}_{= F(s)} \right\}$$

$$\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = e^{-2t} \sin t = f(t)$$

$$y = e^{-2t} \cos t + 2 . e^{-2t} \sin t + u_\pi(t) . \underbrace{f(t-\pi)}_{e^{-2(t-\pi)} \sin(t-\pi)}$$

$$= -e^{-2(t-\pi)} \sin t$$

$$\Rightarrow y = \left\{ \cos t + (2 - e^{2\pi} u_\pi(t)) \sin t \right\} e^{-2t}$$

SORU 4 Aşağıdaki boşluklar öğrenci tarafından doldurulacaktır. (Puan Hariç)

Soyadı:	Adı:	Grup No:	Sıra No:	Puan
İmza:	Elektronik Posta(e-mail) adresi:	Öğrenci No:		

Lütfen bu soruyu bu kağıdın ön yüzünü ve gerekirse arka yüzünü kullanarak cevaplayınız.

[25pt]Aşağıdaki lineer denklem sistemi için

$$\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} -1 & -1/4 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}\mathbf{x} + \begin{pmatrix} e^{-t} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

a) $\Psi(t)$ temel matrisini bulunuz.
b) Sistemin $\mathbf{x}(0) = \mathbf{0}$ başlangıç koşulunu sağlayan çözümünü bulunuz.

a) $$\det(A-\lambda I) = \begin{vmatrix} -1-\lambda & -\frac{1}{4} \\ 4 & -1-\lambda \end{vmatrix} = (1+\lambda)^2+1 = \lambda^2+2\lambda+2=0$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{-2 \pm 2i}{2} = -1 \pm i$$

$$\begin{pmatrix} -i & -1/4 \\ 4 & -i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} -i\xi_1 - \frac{1}{4}\xi_2 = 0 \\ 4\xi_1 - i\xi_2 = 0 \end{matrix} \Rightarrow \xi^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ -4i \end{pmatrix}, \quad \xi^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4i \end{pmatrix}$$

$$x^{(1)}(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ -4i \end{pmatrix} e^{(-1+i)t}, \quad x^{(2)}(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 4i \end{pmatrix} e^{(-1-i)t}$$

$$x^{(1)}(t) = e^{-t}\begin{pmatrix} 1 \\ -4i \end{pmatrix}(\cos t + i\sin t) = \begin{pmatrix} e^{-t}\cos t \\ 4e^{-t}\sin t \end{pmatrix} + i\begin{pmatrix} e^{-t}\sin t \\ -4e^{-t}\cos t \end{pmatrix}$$

$$\Psi(t) = \begin{pmatrix} e^{-t}\cos t & e^{-t}\sin t \\ 4e^{-t}\sin t & -4e^{-t}\cos t \end{pmatrix}$$

b) $\Psi(t)\,u'(t) = g(t)$

$$\left.\begin{matrix} e^{-t}\cos t\, u_1' + e^{-t}\sin t\, u_2' = e^{-t} \\ 4e^{-t}\sin t\, u_1' - 4e^{-t}\cos t\, u_2' = 0 \end{matrix}\right\} \begin{matrix} u_1' = \cos t \Rightarrow u_1 = \sin t + c_1 \\ u_2' = \sin t \Rightarrow u_2 = -\cos t + c_2 \end{matrix}$$

$$x = \Psi(t).u(t) = \begin{pmatrix} e^{-t}\cancel{\sin t\cos t} + c_1 e^{-t}\cos t - e^{-t}\cancel{\sin t\cos t} + c_2 e^{-t}\sin t \\ \underbrace{4e^{-t}\sin^2 t + 4c_1 e^{-t}\sin t + 4e^{-t}\cos^2 t}_{=4e^{-t}} - 4c_2 e^{-t}\cos t \end{pmatrix}$$

$$x = c_1 e^{-t}\begin{pmatrix} \cos t \\ 4\sin t \end{pmatrix} + c_2 e^{-t}\begin{pmatrix} \sin t \\ -4\cos t \end{pmatrix} + 4e^{-t}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$x(0) = 0 \Rightarrow c_1\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2\begin{pmatrix} 0 \\ -4 \end{pmatrix} + 4\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

$c_1 = 0$

$-4c_2 + 4 = 0 \Rightarrow c_2 = 1$

$$x = e^{-t}\begin{pmatrix} \sin t \\ -4\cos t + 4 \end{pmatrix}$$