

SORU 1

Aşağıdaki boşluklar öğrenci tarafından doldurulacaktır. (Puan Hariç)

Soyadı:	Adı:	Grup No:	Sıra No:	Puan
İmza:	Elektronik Posta(e-mail) adresi:	Öğrenci No:		

Lütfen bu soruyu bu kağıdın ön yüzünü ve gerekirse arka yüzünü kullanarak cevaplayınız.

[20p]

$$x^2 y'' + (1+x)y' + 3 \ln(x)y = 0, \quad x > 0, \quad y(1) = 2, \quad y'(1) = 0$$

başlangıç değer probleminin bir çözümü $\phi(x)$ olsun.a) $\phi''(1)$, $\phi'''(1)$ ve $\phi^{iv}(1)$ değerlerini bulunuz. (İPUCU: Verilen $\phi(1)$ ve $\phi'(1)$ değerlerini diferansiyel denklemde yerine koyarak $\phi''(1)$ değerini hesaplayınız.)b) $\phi(x)$ çözümünün Taylor açılımı $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-1)^n$ olsun. Bu durumda a_0, a_1, a_2, a_3, a_4 değerlerini bulunuz.

$$a) \quad y = \phi(x) \Rightarrow y(1) = \phi(1) = 2 \quad \text{and} \quad y'(1) = \phi'(1) = 0$$

$$x^2 \phi''(x) + (1+x)\phi'(x) + 3 \ln x \phi(x) = 0 \quad (1)$$

$$x=1 \Rightarrow \phi''(1) + 0 + 0 = 0 \Rightarrow \phi''(1) = 0$$

By differentiating (1), we will obtain

$$x^2 \phi'''(x) + (1+3x)\phi''(x) + (1+3 \ln x)\phi'(x) + \frac{3}{x}\phi(x) = 0 \quad (2)$$

$$x=1 \Rightarrow \phi'''(1) + 0 + 0 + 3 \cdot 2 = 0 \Rightarrow \phi'''(1) = -6$$

By differentiating (2), we will obtain

$$x^2 \phi^{iv}(x) + (1+5x)\phi'''(x) + (4+3 \ln x)\phi''(x) + \frac{6}{x}\phi'(x) - \frac{3}{x^2}\phi(x) = 0$$

$$x=1 \Rightarrow \phi^{iv}(1) + 6 \cdot (-6) + 0 + 0 - 3 \cdot 2 = 0 \Rightarrow \phi^{iv}(1) = 42$$

$$b) \quad \phi^{(m)}(x_0) = m! a_m$$

$$\phi(1) = a_0 \Rightarrow a_0 = 2$$

$$\phi'(1) = a_1 \Rightarrow a_1 = 0$$

$$\phi''(1) = 2! a_2 \Rightarrow a_2 = 0$$

$$\phi'''(1) = 3! a_3 \Rightarrow a_3 = -1$$

$$\phi^{iv}(1) = 4! a_4 \Rightarrow a_4 = 7/4$$

SORU 2

Aşağıdaki boşluklar öğrenci tarafından doldurulacaktır. (Puan Hariç)

Soyadı:	Adı:	Grup No:	Sıra No:	Puan
İmza:	Elektronik Posta(e-mail) adresi:	Öğrenci No:		

Lütfen bu soruyu bu kağıdın ön yüzünü ve gerekirse arka yüzünü kullanarak cevaplayınız.

[25pt] Aşağıdaki diferansiyel denklem için

$$x^2 y'' + xy' + (x-4)y = 0$$

- a) $x = 0$ noktasının düzgün tekil nokta olduğunu gösteriniz.
b) İndisyel denklemi ve köklerini belirleyiniz.
c) $x > 0$ için büyük köke karşılık gelen seri çözümünü bulunuz.

a) $P(x) = x^2$, $Q(x) = x$, $R(x) = x-4 \Rightarrow P(0) = 0$

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} x \cdot \frac{Q(x)}{P(x)} &= \lim_{x \rightarrow 0} x \cdot \frac{x}{x^2} = 1 \\ \lim_{x \rightarrow 0} x^2 \frac{R(x)}{P(x)} &= \lim_{x \rightarrow 0} x^2 \cdot \frac{x-4}{x^2} = -4 \end{aligned} \right\} x=0 \text{ is a regular singular point}$$

b) $y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{r+n} \Rightarrow y' = \sum_{n=0}^{\infty} (r+n) a_n x^{r+n-1} \Rightarrow y'' = \sum_{n=0}^{\infty} (r+n)(r+n-1) a_n x^{r+n-2}$

By substituting y, y' and y'' into the equation, we get

$$\sum_{n=0}^{\infty} (r+n)(r+n-1) a_n x^{r+n} + \sum_{n=0}^{\infty} (r+n) a_n x^{r+n} - 4 \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{r+n} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{r+n+1} = 0$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} [(r+n)^2 - 4] a_n x^{r+n} + \sum_{n=1}^{\infty} a_{n-1} x^{r+n} = 0$$

$$(r^2 - 4) a_0 x^r + \sum_{n=1}^{\infty} \{ [(r+n)^2 - 4] a_n + a_{n-1} \} x^{r+n} = 0$$

= 0 indicial equation

$$r^2 - 4 = 0 \Rightarrow r^2 = 4 \Rightarrow r_{1,2} = \pm 2$$

$$c) r=2 \Rightarrow [(2+n)^2-4]a_n + a_{n-1} = 0$$

$$\Rightarrow a_n = -\frac{a_{n-1}}{n \cdot (n+4)}, (n \geq 1)$$

$$n=1 \Rightarrow a_1 = -\frac{a_0}{1 \cdot 5}$$

$$n=2 \Rightarrow a_2 = -\frac{a_1}{2 \cdot 6} = \frac{a_0}{1 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 6}$$

$$n=3 \Rightarrow a_3 = -\frac{a_2}{3 \cdot 7} = -\frac{a_0}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7}$$

.....

$$a_n = (-1)^n \frac{4!}{n!(n+4)!} a_0, (n \geq 1)$$

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{2+n}$$

$$= a_0 \underbrace{\left[1 + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{4!}{n!(n+4)!} x^n \right]}_{=y_1} x^2$$

SORU 3

Aşağıdaki boşluklar öğrenci tarafından doldurulacaktır. (Puan Hariç)

Soyadı:	Adı:	Grup No:	Sıra No:	Puan
İmza:	Elektronik Posta(e-mail) adresi:	Öğrenci No:		

Lütfen bu soruyu bu kağıdın ön yüzünü ve gerekirse arka yüzünü kullanarak cevaplayınız.

[15pt] a) Aşağıdaki şekilde tanımlanmış $f(t)$ fonksiyonunun Laplace dönüşümünü bulunuz.

$$f(t) = \begin{cases} 0, & t < 5 \\ te^t, & t \geq 5 \end{cases}$$

[15pt] b) Aşağıdaki başlangıç değer problemini çözünüz.

$$y'' + 4y' + 5y = \delta(t - \pi) \cos t, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0.$$

Laplace Dönüşüm Tablosu

$e^{at} \sin bt$	$\frac{b}{(s-a)^2 + b^2}, s > a$	$\delta(t-c)f(t)$	$e^{-cs}f(c)$, if f is continuous
$e^{at} \cos bt$	$\frac{s-a}{(s-a)^2 + b^2}, s > a$	$u_c(t)f(t-c)$	$e^{-cs}F(s)$
$t^n e^{at}, n = 0, 1, 2, \dots$	$\frac{n!}{(s-a)^{n+1}}, s > a$	$e^{ct}f(t)$	$F(s-c)$
$u_c(t)$	$\frac{e^{-cs}}{s}, s > 0$	$f^{(n)}(t)$	$s^n F(s) - s^{n-1}f(0) - \dots - f^{(n-1)}(0)$

$$a) f(t) = te^t \begin{cases} 0, & t < 5 \\ 1, & t \geq 5 \end{cases} = te^t u_5(t)$$

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \mathcal{L}\{te^t u_5(t)\} \Rightarrow f(t-5) = te^t \Rightarrow f(t) = (t+5)e^{t+5} \\ = e^{-5s} F(s)$$

$$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\} = \mathcal{L}\{(t+5)e^{t+5}\} \\ = e^5 \left[\mathcal{L}\{te^t\} + \mathcal{L}\{5e^t\} \right] = e^5 \left[\frac{1}{(s-1)^2} + \frac{5}{s-1} \right]$$

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = e^{-5(s-1)} \frac{5s-4}{(s-1)^2}$$

$$b) \mathcal{L}\{y'' + 4y' + 5y\} = \mathcal{L}\{\delta(t-\pi) \cdot \cos t\}$$

$$s^2 \mathcal{L}\{y\} - s y(0) - y'(0) + 4 [s \mathcal{L}\{y\} - y(0)] + 5 \mathcal{L}\{y\} = e^{-\pi s} \cos \pi$$

$$(s^2 + 4s + 5) \mathcal{L}\{y\} = s + 4 - e^{-\pi s}$$

$$s^2 + 4s + 4 + 1 = (s+2)^2 + 1$$

$$\mathcal{L}\{y\} = \frac{s+4 - e^{-\pi s}}{(s+2)^2 + 1}$$

$$y = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{s+2}{(s+2)^2 + 1} + \frac{2}{(s+2)^2 + 1} - e^{-\pi s} \underbrace{\frac{1}{(s+2)^2 + 1}}_{=F(s)} \right\}$$

$$\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = e^{-2t} \sin t = f(t)$$

$$y = e^{-2t} \cos t + 2 \cdot e^{-2t} \sin t + u_{\pi}(t) \cdot \underbrace{f(t-\pi)}_{e^{-2(t-\pi)} \sin(t-\pi)} \\ = -e^{-2(t-\pi)} \sin t$$

$$\Rightarrow y = \left\{ \cos t + (2 - e^{2\pi} u_{\pi}(t)) \sin t \right\} e^{-2t}$$

SORU 4

Aşağıdaki boşluklar öğrenci tarafından doldurulacaktır. (Puan Hariç)

Soyadı:	Adı:	Grup No:	Sıra No:	Puan
İmza:	Elektronik Posta(e-mail) adresi:	Öğrenci No:		

Lütfen bu soruyu bu kağıdın ön yüzünü ve gerekirse arka yüzünü kullanarak cevaplayınız.

[25pt]Aşağıdaki lineer denklem sistemi için

$$x' = \begin{pmatrix} -1 & -1/4 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} e^{-t} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

a) $\Psi(t)$ temel matrisini bulunuz.b) Sistemin $x(0) = 0$ başlangıç koşulunu sağlayan çözümünü bulunuz.

$$a) \det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} -1-\lambda & -\frac{1}{4} \\ 4 & -1-\lambda \end{vmatrix} = (1+\lambda)^2 + 1 = \lambda^2 + 2\lambda + 2 = 0$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{-2 \pm 2i}{2} = -1 \pm i$$

$$\begin{pmatrix} -1 & -1/4 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} -i\xi_1 - \frac{1}{4}\xi_2 = 0 \\ 4\xi_1 - i\xi_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \xi_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -4i \end{pmatrix} \\ \xi_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 4i \end{pmatrix} \end{cases}$$

$$x^{(1)}(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ -4i \end{pmatrix} e^{(-1+i)t}, \quad x^{(2)}(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 4i \end{pmatrix} e^{(-1-i)t}$$

$$x^{(1)}(t) = e^{-t} \begin{pmatrix} 1 \\ -4i \end{pmatrix} (\cos t + i \sin t) = \begin{pmatrix} e^{-t} \cos t \\ 4e^{-t} \sin t \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} e^{-t} \sin t \\ -4e^{-t} \cos t \end{pmatrix}$$

$$\Psi(t) = \begin{pmatrix} e^{-t} \cos t & e^{-t} \sin t \\ 4e^{-t} \sin t & -4e^{-t} \cos t \end{pmatrix}$$

b) $\Psi(t) u'(t) = g(t)$

$$\begin{cases} e^{-t} \cos t u_1' + e^{-t} \sin t u_2' = e^{-t} \\ 4e^{-t} \sin t u_1' - 4e^{-t} \cos t u_2' = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u_1' = \cos t \Rightarrow u_1 = \sin t + c_1 \\ u_2' = \sin t \Rightarrow u_2 = -\cos t + c_2 \end{cases}$$

$$x = \Psi(t) u(t) = \begin{pmatrix} e^{-t} \sin t \cos t + c_1 e^{-t} \cos t - e^{-t} \sin t \cos t + c_2 e^{-t} \sin t \\ 4e^{-t} \sin^2 t + 4c_1 e^{-t} \sin t + 4e^{-t} \cos^2 t - 4c_2 e^{-t} \cos t \end{pmatrix}$$

$$= 4e^{-t} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$x = c_1 e^{-t} \begin{pmatrix} \cos t \\ 4 \sin t \end{pmatrix} + c_2 e^{-t} \begin{pmatrix} \sin t \\ -4 \cos t \end{pmatrix} + 4e^{-t} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$x(0) = 0 \Rightarrow c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \end{pmatrix} + 4 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

$$c_1 = 0$$

$$-4c_2 + 4 = 0 \Rightarrow c_2 = 1$$

$$x = e^{-t} \begin{pmatrix} \sin t \\ -4 \cos t + 4 \end{pmatrix}$$