ÇALIŞMA SORULARI III

Ders: MAT 261
Konu: Vektör Uzayları

1. Aşağıdaki kümeler, verilen toplama ve skaler çarpma işlemlerine göre vektör uzayı olur mu? Olmazsa vektör uzayı tanımındaki koşullardan hangileri sağlanmaz? Açıklayınız.

   (a) $V=$ pozitif reel sayılar kümesi, işlemler: bilinen (yani standart) toplama ve skalerle çarpma işlemleri,

   (b) $V=$ pozitif reel sayılar kümesi, işlemler: (toplama) $x \bigoplus y = xy$;
   (skalerle çarpma) $\alpha \bigodot x = x^{\alpha}$ $(\alpha \in \mathbb{R})$,

   (c) $V = \mathbb{Z} =$ Tam sayılar kümesi, işlemler: bilinen (yani standart) toplama;
   (skalerle çarpma) $\alpha \bigodot k = \lfloor \alpha \rfloor k$ $(\alpha \in \mathbb{R},\ k \in \mathbb{Z},\ \lfloor \cdot \rfloor$: tamdeğer fonksiyonu$)$,

   (d) $V = R^3$, işlemler;
   $$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \bigoplus \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x+x' \\ y+y' \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \alpha \bigodot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

   (e) $V = R^2$'de $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$, $y \geq 0$ koşulunu sağlayan küme ve bilinen toplama ve skaler çarpma işlemleri.

2. $R^{2\times2}$'de $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, $ab = 0$ şeklinde elemanlara sahip bir küme matris toplam ve skaler çarpma işlemlerine göre vektör uzayı mıdır? Neden?

3. R reel sayılar kümesinin

   $$x \bigoplus y = min\{\ x,\ y\ \}, \qquad \alpha \bigodot x = \alpha x$$

   işlemlerine göre vektör uzayı oluşturup oluşturmadığını nedenlerini açıklayarak belirtiniz.

4. U ve V, W vektör uzayının alt uzayı ise $U \cap V$ de W nun alt uzayıdır. Gösteriniz.

5. (a) $S = \left\{(x_1, x_2, x_3)^T \ \middle|\ x_1 = x_2^2\right\}$,

   (b) $S = \left\{(x_1, x_2, x_3)^T \ \middle|\ x_1 + 2x_2 = 0\right\}$ kümeleri R^3 vektör uzayının bir alt uzayı mıdır? Neden?

6. $R^{2\times2}$'de $A^2 = 0$ koşulunu sağlayan matrislerin kümesi hangi koşul altında toplama işlemine göre kapalıdır? Açıklayınız.

7. P_4'te

   (a) derecesi tek olan

   (b) $p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + 2$ şeklindeki

   polinomların kümesi alt uzay mıdır? Neden?

8. $C[-1, 1]$ de $f(0) = 1/2$ olan fonksiyonların kümesi, alt uzay mıdır? Neden?

9. R^3 'te

   $w_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \\ 3 \end{bmatrix}$, $w_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, $w_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ -1 \end{bmatrix}$

   vektörlerinden hangileri

   $u_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$, $u_2 = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}$, $u_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 6 \end{bmatrix}$

   vektörlerinin lineer bileşimidir? Gösteriniz. Ayrıca, $U = \{u_1, u_2, u_3\}$ kümesinin lineer bağımlı olduğunu gösterip U içindeki lineer bağımsız vektör çiftlerini bulunuz.

10. P_3'te $\{x + 3, x + 2, x^2 - 1\}$, $\{x - 1, 3x^2\}$ ve $\{x^2 + 1, x, x + 2, x - 1\}$ kümeleri

    (a) lineer bağımsız mıdırlar?

    (b) P_3 uzayını gererler mi? Neden?

11. P_3'te $v_1 = x^2 + 3x - 1$, $v_2 = x^2 + 2x$, $v_3 = x - 1$ vektörlerinin oluşturduğu $S = \{v_1, v_2, v_3\}$ kümesinin lineer bağımlı olup olmadığını araştırınız. Lineer bağımlı ise aralarındaki bağıntıyı bulunuz.

12. $f_1(x) = \sin \frac{\pi}{2}x$, $f_2(x) = \cos \frac{\pi}{2}x$, $f_3(x) = 1$ fonksiyonları $[0, 1]$ aralığında veriliyor. $f_1(x)$, $f_2(x)$, $f_3(x)$ fonksiyonlarının lineer bağımsız olduğunu bu fonksiyonların Wronskian'ını yani $W[f_1, f_2, f_3]$'i hesaplamak suretiyle gösteriniz. Aynı soruyu $f_1(x) = e^{2x} + e^{-2x}$, $f_2(x) = e^{2x} - e^{-2x}$, $f_3(x) = 1$ fonksiyonları için çözünüz.

13. $S = \{ax^2 + bx + (2a + 3b)\ ;\ \ a, b \in R\ \}$ kümesi P_3 vektör uzayının bir alt uzayı olsun. S'nin bazını ve boyutunu bulunuz.

14. P_4'te $S = \{x^3 + x + 1, x^2 - x - 2, x^3 + 3, -x^3 + x^2 - 4x + 1\}$ kümesindeki vektörlerin ürettiği altuzayın baz ve boyutunu bulunuz. Bu alt uzay P_4 uzayına eşit midir?

15. $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 4 & 0 \\ 2 & -1 & 4 & 4 & -6 \end{bmatrix}$ matrisi olmak üzere, $AX = 0$ homojen denklem sisteminin çözüm uzayı ($N(A)$ sıfır uzayı) için bir baz (taban) bulunuz.

16. $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 2 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$ matrisinin satır uzayı, sütun uzayı ve sıfır uzayı için birer taban bulunuz. Matrisin rankını belirleyiniz.

17. Asağıdaki herbir şıkta $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ sisteminin çözülebilir olması için $\mathbf{b}$'nin sağlaması gereken koşulları bulunuz.

   (a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 2 & 8 & 4 \\ -1 & -4 & -2 \end{bmatrix}$ (b) $A = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 9 \\ -1 & -4 \end{bmatrix}$ (c) $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

18. Hangi a b, c and d sayıları için $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & a & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & b & 2 \end{bmatrix}$ ve $B = \begin{bmatrix} c & d \\ d & c \end{bmatrix}$ matrislerinin rankı 2'dir?

19. (a) $\mathbf{v_1} = \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \end{bmatrix}$, $\mathbf{v_2} = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix}$ ve $S = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ matrisleri veriliyor. S $[\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}]$ tabanından $[\mathbf{u_1}, \mathbf{u_2}]$ tabanına geçiş matrisi olacak şekilde $\mathbf{u_1}$ ve $\mathbf{u_2}$ vektörleri bulunuz.

   (b) P_2 uzayında, $[2x-1, 2x+1]$ sıralı tabanından $[x, 1]$ tabanına geçiş matrisini bulunuz.