T.C. ANADOLU ÜNİVERSİTESİ YAYINLARI NO: 1074
AÇIKÖĞRETİM FAKÜLTESİ YAYINLARI NO: 589

MATEMATİK ÖĞRETMENLİĞİ

Lineer Cebir

Yazar:
Yrd.Doç.Dr. Nezahat ÇETİN
Öğr.Grv.Dr. Nevin ORHUN

Editör:
Prof.Dr. Orhan ÖZER

Bu kitabın basım, yayım ve satış hakları
Anadolu Üniversitesine aittir.

"Uzaktan öğretim" tekniğine uygun olarak hazırlanan bu kitabın
bütün hakları saklıdır.

İlgili kuruluştan izin almadan kitabın tümü ya da
bölümleri mekanik, elektronik, fotokopi, manyetik kayıt
veya başka şekillerde çoğaltılamaz,
basılamaz ve dağıtılamaz.

Copyright © 1998 by Anadolu University

All rights reserved

*No part of this book may be reproduced
or stored in a retrieval system, or transmitted
in any form or by any means mechanical, electronic,
photocopy, magnetic tape or otherwise, without
permission in writing from the University.*

Tasarım: Yrd.Doç.Dr. Kazım SEZGİN

ISBN 975 - 492 - 829 - 0

Başlarken

Anadolu Üniversitesi Açık Öğretim Fakültesi'nin öğretmenlere kazandırdığı önlisans diplomasından sonra, onlara lisans diploması alma hakkının tanınması ve buna olanak sağlayacak şekilde lisans tamamlama programları açması taktirle karşılanabilecek bir hizmettir. Değerli öğretmenlerimizin bu fırsatı en iyi şekilde değerlendirebileceklerinden hiç şüphe yoktur. Bu yolla hem alan bilgilerini arttıracaklar hem de yeni haklar kazanacaklardır. Bunun sonucu olarak da okullarında daha nitelikli, daha çağdaş hizmet sunabileceklerdir. Bu kitabın da bu hizmete küçük bir katkısının olacağını umarım.

Kitap, İlköğretim Öğretmenliği Lisans Tamamlama Programı Matematik Yan Alan derslerinden Lineer Cebir dersinin içeriğini kapsayacak şekilde hazırlanmıştır. On üniteden oluşan bu kitapta, matrisler ve determinantlar, doğrusal denklem sistemleri ve vektör uzayı konuları ele alınmıştır. Bu konular sadece matematik alanında değil, istatistik, işletme, iktisat, mühendislik hatta sosyal bilimler alanlarında araç olarak kullanılabilecek kavramlar ve yöntemler içermektedir. Bu nedenle de temel sayılabilecek tanımlar ve kavramlar üzerinde durulmuştur. Ünitelerde teorik anlatımdan kaçınılarak, kavramlar daha çok örneklerle anlatılmaya çalışılmıştır; konular fazla önbilgiye gereksinim duyulmadan anlaşılabilecek, kendi içinde bütünlüğü olacak şekilde verilmeye çalışılmıştır. Okuyucunun çalışırken örnekleri dikkatlice incelemesi, benzer örnekler oluşturması, metin içinde ve sonunda bırakılan soruları çözmesi konuları kavrayıp pekiştirmesine yardımcı olacaktır. Kaynak kitaplara başvurulması her zaman yararlı olmuştur ve olacaktır.

Böyle bir programın açılmasında, düzenlenmesinde, bu kitap dahil kitaplarının hazırlanmasında, yazımında, basımında tüm emeği geçenlere teşekkürlerimi sunarım; öğretmenlerimize yararlı olmasını dilerim.

Prof.Dr. Orhan ÖZER
Editör

Matrisler

ÜNİTE 1

Yazar
Yrd.Doç.Dr. Nezahat ÇETİN

Amaçlar

Bu üniteyi çalıştıktan sonra;

- Matris kavramını öğrenecek,
- İki matrisin toplamı, bir matrisin skaler ile çarpımı, iki matrisin çarpımı işlemlerini ve bu işlemlerin özelliklerini kavrayacak,
- Bazı özel tip matrisleri tanıyacak,
- Bir matrisin rankı hakkında fikir edinecek,
- Bir matrisin tersinin ne olduğunu öğreneceksiniz.

İçindekiler

Çalışma Önerileri

- Bu üniteyi çalışırken tanımları iyice kavrayıp çözülmüş örnekleri dikkatlice gözden geçiriniz.
- Okuyucuya bırakılan soruları çözünüz.

1. Matris Kavramı

Günlük yaşantımızda, birden fazla veri aynı anda kullanılmak istenildiğinde bu veriler tablolar ile temsil edilir. Bu gösterim şekli pek çok alanda kullanılmaktadır. Örneğin, muhasebe işlemleri, okullardaki ders programlarının hazırlanması ve öğrencilerin not durumlarının takibi, anket sonuçlarının değerlendirilmesi, bazı bilim dallarında yapılan deneylerin sonuçlarının değerlendirilmesi bunlardan bir kaç tanesidir. Aşağıda, tablo ile gösterime bir örnek verilmiştir.

1.1. Örnek

Bir mağazada satılan A, B, C ve D mallarının mağazaya giriş fiyatları, satış fiyatları ve bu mallardan kaç adet alınıp, kaç adet satıldığını tablo ile gösterelim.

Malın Adı	Alış Fiyatı (TL)	Satış Fiyatı (TL)	Alınan Miktar (Adet)	Satılan Miktar (Adet)
A	500.000	750.000	1100	950
B	650.000	975.000	2500	1500
C	775.000	1.165.000	800	530
D	825.000	1.240.000	950	822

Tabloya göre, B malı 650.000 TL'ye alınıp, 975.000 TL'ye satılmış ve alınan 2500 adet maldan 1500 tanesi satılmıştır.

Bu örnekler daha da çoğaltılabilir. İşte, elimizdeki verileri gösterdiğimiz, belli sayıda satır ve belli sayıda sütundan oluşan tabloya, matris denir. Aşağıda matrisin matematiksel tanımı verilmiştir.

1.2. Tanım

m x n tane sayının, m satır ve n sütuna yerleştirilmesiyle oluşturulan tabloya bir **matris** denir.

Genel olarak bir matris,

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & & & \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}_{m \times n}$$

şeklinde gösterilir ve A, B, C, ... gibi harfler ile temsil edilir. m satır ve n sütundan oluşan bir matrise m x n tipinde bir matris ve a_{ij} sayılarına da matrisin öğeleri denir. m x n tipindeki bir matris, kısaca $A = (a_{ij})_{mxn}$ şeklinde yazılır. Bir a_{ij} öğesindeki i indisi öğenin i. satırda olduğunu, j indisi ise j. sütunda olduğunu gösterir. Bundan dolayı a_{ij} öğesi, matrisin i. satır ile j. sütununun kesiştiği yerdedir. Örneğin,

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 6 \\ 0 & 4 & 5 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \rightarrow 2.\ \text{satır} \\ \\ \end{array}$$

$\downarrow$

3. sütun

matrisinde a_{23} öğesi, 2. satır ile 3. sütunun kesiştiği yerde olan 5'tir.

1.3. Tanım

$A = (a_{ij})_{mxn}$ ve $B = (b_{ij})_{mxn}$ matrisleri verilsin. Eğer $i = 1, 2, \dots, m$ ve $j = 1, 2, \dots, n$ için $a_{ij} = b_{ij}$ ise A ve B matrislerine **eşit matrisler** denir ve bu matrisler A = B şeklinde gösterilir.

İki matrisin eşit olabilmesi için aynı tipten matrisler olması gerektiğine dikkat ediniz.

1.4. Örnek

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{ve} \quad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{pmatrix}$$

matrisleri eşit matrisler ise $b_{11} = a_{11} = 1$, $b_{12} = a_{12} = -1$, $b_{21} = a_{21} = 2$, $b_{22} = a_{22} = 1$, $b_{31} = a_{31} = 3$ ve $b_{32} = a_{32} = 0$'dır.

2. Özel Tipte Matrisler

Bazı matrisler tipine göre ya da öğelerinin taşıdıkları kısmi özelliklere göre özel adlar alabilmektedirler. Bu bölümde, bu tür özel adlandırılan matrisler tanımlanıp örnekler sunulacaktır.

2.1. Tanım

A, mxn tipinde bir matris olsun. Eğer m = 1 ise, yani A 1xn tipinde bir matris ise A matrisine **satır matrisi**; n = 1 ise, yani A mx1 tipinde bir matris ise A matrisine **sütun matrisi** denir.

$A = (1\ \ 2\ \ 3\ \ -5)$ matrisi satır matrisine, $B = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}$ matrisi de sütun matrisine birer örnektir.

2.2. Tanım

Bir matriste satır sayısı ile sütun sayısı eşit ise bu matrise **kare matris** denir.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

bir kare matristir. Çünkü A matrisinin satır sayısı ve sütun sayısı 3'tür.

nxn tipindeki bir kare matrise, **n. mertebeden kare matris** denir. Buna göre yukarıda kare matrise örnek verilen A matrisi 3. mertebeden bir kare matristir. Ayrıca, n. mertebeden bir kare matriste, $i = 1, 2, ..., n$ için a_{ii} öğelerine matrisin **köşegen öğeleri** denir. Örneğin,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & -1 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

kare matrisinin köşegen öğeleri 1, 0, -1 ve 5'tir.

2.3. Tanım

Bir matrisin tüm öğeleri sıfır ise, bu matrise **sıfır matris** denir ve mxn tipindeki bir sıfır matrisi O_{mxn} şeklinde gösterilir.

Aşağıda sıfır matrisine iki örnek verilmiştir:

$$O_{2x3} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad O_{4x4} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

2.4. Tanım

A n. mertebeden bir kare matris olsun. Her $i \neq j$ için $a_{ij} = 0$ ise A matrisine **köşegen matris** denir.

Örneğin,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

matrisleri, sırasıyla 3. ve 4. mertebeden köşegen matrislerdir. Özel olarak, n. mertebeden bir sıfır matris de köşegen bir matristir.

2.5. Tanım

Bir köşegen matriste, köşegen üzerindeki öğelerin hepsi eşit ise bu matrise **skaler matris** denir.

2.6. Örnek

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & x & 0 \\ 0 & 0 & y \end{pmatrix}$$ matrisinin skaler matris olması için x ve y ne olmalıdır?

Çözüm

A matrisinde $a_{11} = 2$ dir. Diğer taraftan skaler matriste $a_{11} = a_{22} = a_{33}$ olması gerektiğinden $x = a_{22} = 2$ ve $y = a_{33} = 2$ olmalıdır.

2.7. Tanım

Bir kare matrisin köşegeni üzerindeki tüm öğeleri 1 ve geriye kalan bütün öğeleri 0 ise, bu matrise bir **birim matris** denir.

n. mertebeden birim matris I_n ile gösterilir ve

$$I_n = (\delta_{ij})_{nxn}, \quad \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \text{ ise} \\ 0, & i \neq j \text{ ise} \end{cases}$$

biçiminde de ifade edilir.

$$I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ ve } I_5 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

matrisleri sırasıyla 2. ve 5. mertebeden birim matrislerdir.

2.8. Tanım

Bir $A = (a_{ij})_{nxn}$ kare matrisi verilsin. Eğer her i, j için $a_{ij} = a_{ji}$ ise A matrisine **simetrik matris** denir.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 4 \\ 0 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

matrisinin simetrik olup olmadığını inceleyelim. A matrisinin simetrik olabilmesi için $i, j = 1, 2, 3$ ve $i \neq j$ için $a_{ij} = a_{ji}$ olmalıdır. $a_{12} = a_{21} = -1$, $a_{13} = a_{31} = 0$, $a_{23} = a_{32} = 4$ olduğundan A matrisi bir simetrik matristir.

2.9. Tanım

$A = (a_{ij})_{nxn}$ kare matrisi verilsin. Eğer her i, j için $a_{ij} = - a_{ji}$ ise A matrisine **ters simetrik matris** denir.

Bir ters simetrik matriste, $i = j$ olması durumunda $a_{ii} = -a_{ii}$ koşulunun ancak $a_{ii} = 0$ iken sağlandığına dikkat edersek, ters simetrik matrisin köşegen öğelerinin sıfır olması gerektiğini söyleyebiliriz.

2.10. Örnek

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & -4 & 5 \\ -2 & 4 & 0 & -1 \\ -3 & -5 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

matrisi 4. mertebeden ters simetrik bir matristir.

2.11. Tanım

$A = (a_{ij})_{nxn}$ kare matrisinde her $i < j$ için $a_{ij} = 0$ ise A matrisine **altüçgensel matris**, her $i > j$ için $a_{ij} = 0$ ise A matrisine **üstüçgensel matris** denir.

Tanımdan anlaşılacağı gibi, altüçgensel matrisin köşegeninin üstünde kalan öğeler ve üstüçgensel matrisin köşegeninin altında kalan öğeler sıfırdır. Aşağıda sırasıyla altüçgensel ve üstüçgensel matrislere birer örnek verilmiştir:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ -4 & 1 & 1 & 4 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & 2 & 5 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

n. mertebeden bir köşegen matrisin hem altüçgensel, hem de üstüçgensel olduğu açıktır. Gerçekten de,

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

matrisinde, köşegenin üst kısmında kalan tüm öğeler sıfır olduğundan bu matris bir altüçgensel matris ve benzer şekilde köşegenin alt kısmında kalan tüm öğeler de sıfır olduğundan bir üstüçgensel matristir.

3. Bir Matrisin Transpozesi

3.1. Tanım

Bir A matrisinin satırları ile sütunlarının yer değiştirilmesiyle elde edilen yeni matrise, A matrisinin **transpozesi** denir ve bu matris A^t ile gösterilir.

Tanımdan anlaşılacağı gibi, mxn tipindeki bir matrisin transpozesi nxm tipindedir.

3.2. Örnek

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$ matrisinin transpozesi $A^t = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}$ matrisidir.

Bir A matrisi için $(A^t)^t = A$ olduğu açıktır.

4. Matris İşlemleri

Bu bölümde, matrisler arasında matris toplamı, matris farkı, matris çarpımı işlemlerini ele alacağız. Önce bu işlemleri sırayla tanımlayıp, sonra özelliklerini sıralayıp örnekler vereceğiz.

4.1. Tanım

$A = (a_{ij})_{mxn}$ ve $B = (b_{ij})_{mxn}$ aynı tipten iki matris olsun. Öğeleri,

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij} \qquad (i = 1, 2, ..., m; \ \ j = 1, 2, ..., n)$$

şeklinde oluşturulan $C = (c_{ij})_{mxn}$ matrisine A ve B matrislerinin **toplamı** denir ve bu matris A + B şeklinde gösterilir.

Bu tanımın aşağıdaki gibi verilebileceği açıktır:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mn} \end{pmatrix}$$

matrisleri için

$$A + B = \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & \cdots & a_{1n} + b_{1n} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} & \cdots & a_{2n} + b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} + b_{m1} & a_{m2} + b_{m2} & \cdots & a_{mn} + b_{mn} \end{pmatrix}$$

dir.

İki matrisin toplanabilmesi için aynı tipten matrisler olduğuna dikkat ediniz.

4.2. Örnek

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 1 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \quad \text{ve} \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 7 & 1 \\ -2 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{matrisleri için}$$

$$A + B = \begin{pmatrix} 2 + (-1) & -1 + 0 & 0 + 7 & 1 + 1 \\ 3 + (-2) & 4 + 1 & 5 + 1 & 6 + 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 7 & 2 \\ 1 & 5 & 6 & 8 \end{pmatrix} \quad \text{dir}$$

Aşağıda matris toplama işleminin özellikleri verilmiştir:

a) Aynı tipten matrisler (toplanabilir matrisler) arasında matris toplamının **birleşme özelliği** vardır. Gerçekten, $A = (a_{ij})_{mxn}$, $B = (b_{ij})_{mxn}$ ve $C = (c_{ij})_{mxn}$ matrisleri için (A+B) + C matrisinin i. satır, j. sütunundaki

$(a_{ij} + b_{ij}) + c_{ij}$ $\quad (i = 1, 2, ..., m;\ \ j = 1, 2, ..., n)$

öğesi, A + (B+C) nin aynı satır ve sütunundaki

$a_{ij} + (b_{ij} + c_{ij})$ $\quad (i = 1, 2, ..., m;\ \ j = 1, 2, ..., n)$

öğesine eşittir. Çünkü sayılar arasında toplama işleminin birleşme özelliği vardır. O halde

$$(A+B) + C = A + (B+C)$$

dir. Bu özelliğe parantez kaydırma özelliği de denir. Bu özelliğin sonucu olarak, ikiden fazla sayıda toplanabilir matrisin toplamını parantezsiz olarak yazabiliriz. A, B, C ve D toplanabilir matrisler ise, bunların toplamı A+B+C+D olarak yazılabilir.

b) Toplanabilir iki matris arasında matris toplamının **değişme özelliği** vardır. Yani A ve B toplanabilir iki matris ise A+B = B+A dır. Bu özelliğin kanıtını, birleşme özelliğinin kanıtına benzer şekilde kolaylıkla yapabilirsiniz.

c) A, mxn tipinde bir matris olmak üzere,

$$A + O_{mxn} = O_{mxn} + A = A$$

dır. Bu eşitliğin doğruluğunu göstermek oldukça kolaydır. $A + O_{mxn}$ matrisinin i. satır j. sütunundaki

$$a_{ij} + 0 \qquad (i = 1, 2, ..., m;\ \ j = 1, 2, ..., n)$$

öğesi, sıfırın sayılardaki toplama işlemine göre etkisiz eleman olmasından dolayı,

$$a_{ij} \quad , \qquad (i = 1, 2, ..., m;\ \ j = 1, 2, ..., n)$$

öğesine eşittir. Bu da $A + O_{mxn} = A$ demektir. $O_{mxn} + A = A$ olduğu da benzer şekilde gösterilir.

4.3. Tanım

$A = (a_{ij})_{mxn}$ ve $r \in \mathbf{R}$ olsun. Öğeleri,

$b_{ij} = r\, a_{ij}$ $\qquad (i = 1, 2, ..., m;\ \ j = 1, 2, ..., n)$

şeklinde oluşturulan $B = (b_{ij})_{mxn}$ matrisine A matrisinin **r sayısı ile çarpımı** denir ve bu matris rA şeklinde gösterilir.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

matrisi ve r gerçel sayısı için

$$A = \begin{pmatrix} ra_{11} & ra_{12} & \cdots & ra_{1n} \\ ra_{21} & ra_{22} & \cdots & ra_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ ra_{m1} & ra_{m2} & \cdots & ra_{mn} \end{pmatrix}$$

dir. Örneğin,

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -5 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 3 & 4 & 1 \\ -2 & 6 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{ve} \quad r = 2 \quad \text{ise} \quad r\,A = \begin{pmatrix} 4 & -10 & 2 \\ 2 & 0 & 4 \\ 6 & 8 & 2 \\ -4 & 12 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{dir.}$$

Aşağıda bir sayı ile matris çarpımı işleminin özellikleri verilmiştir:

a) A bir matris ve r, s ∈ **R** olsun. Bu durumda,

$$(r + s)\ A = rA + sA$$

dır. Gerçekten de, (r + s) A matrisinin i. satır ve j. sütunundaki

$$(r + s)\ a_{ij} \qquad (i = 1, 2, ..., m;\ \ j = 1, 2, ..., n)$$

öğesi rA + sA matrisinin aynı konumdaki,

$$ra_{ij} + sa_{ij} \qquad (i = 1, 2, ..., m;\ \ j = 1, 2, ..., n)$$

öğesine eşittir. Çünkü sayılarda çarpma işleminin, toplama işlemi üzerine dağılma özelliği vardır. Her i, j için $(r + s)\ a_{ij} = ra_{ij} + sa_{ij}$ olduğundan ve matrislerin eşitliği tanımından (r + s) A = rA + sA olur.

b) A ve B toplanabilir iki matris ve r ∈ **R** olsun. Bu durumda,

$$r\,(A + B) = rA + rB$$

dir.

c) A bir matris ve r, s ∈ **R** olsun. Bu durumda,

$$(rs)\ A = r\,(sA)$$

dır.

(b) ve (c) özelliklerinin doğruluğunu, (a) şıkkına benzer şekilde gösterebilirsiniz.

d) mxn tipindeki bir A matrisi için,

$$1A = A \text{ ve } 0A = O_{mxn}$$

olduğu açıktır.

Bir A matrisi için (-1)A matrisi -A ile gösterilir ve bu matrise A matrisinin **toplamsal tersi** denir. Örneğin,

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -\sqrt{2} \end{pmatrix} \text{ matrisinin toplamsal tersi } -A = \begin{pmatrix} -3 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & \sqrt{2} \end{pmatrix}$$

dir.

Açıktır ki, mxn tipindeki bir A matrisi için $A + (-A) = 0_{mxn}$ dir.

$A = (a_{ij})_{mxn}$, $B = (b_{ij})_{mxn}$ ve $r, s \in \mathbf{R}$ olmak üzere, $rA + sB$ matrisine C matrisi diyelim. C matrisinin öğeleri,

$$c_{ij} = ra_{ij} + sb_{ij} \qquad (i = 1, 2, ..., m; \; j = 1, 2, ..., n)$$

şeklindedir. Burada özel olarak r = 1 ve s = 1 alınırsa, C matrisinin öğeleri,

$$c_{ij} = 1a_{ij} + (-1)b_{ij} = a_{ij} - b_{ij} \qquad (i = 1, 2, ..., m; \; j = 1, 2, ..., n)$$

dir. Bu şekilde elde edilen C matrisine, A ile B matrisinin **farkı** denir ve bu matris A - B şeklinde gösterilir. Bir başka ifadeyle A - B = A + (-B) dir.

4.4. Örnek

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 7 & -4 & 2 \\ 0 & 3 & 6 & 3 \end{pmatrix} \text{ ve } B = \begin{pmatrix} 8 & 4 & 2 & 1 \\ -2 & 3 & 5 & 0 \end{pmatrix} \text{ ise } A - B \text{ matrisi } \begin{pmatrix} -3 & 3 & -6 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \text{ dir.}$$

4.5. Tanım

$A = (a_{ij})_{mxp}$ ve $B = (b_{ij})_{pxn}$ olsun. Öğeleri,

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik} b_{kj} \qquad (i = 1, 2, ..., m; \; j = 1, 2, ..., n)$$

şeklinde oluşturulan $C = (c_{ij})_{mxn}$ matrisine A ile B matrisinin **çarpımı** denir ve bu matris AB şeklinde gösterilir.

$A = (a_{ij})_{mxp}$ ile $B = (b_{ij})_{pxn}$ matrisinin çarpımı olan AB matrisinin satır sayısı, A matrisinin satır sayısına, sütun sayısı ise B matrisinin sütun sayısına eşittir. Ayrıca, iki matrisin çarpılabilmesi için birinci çarpan matrisinin sütun sayısı ile ikinci çarpan matrisinin satır sayısının eşit olması gerektiğine dikkat edilmelidir. Aşağıda iki matrisin çarpımına bir örnek verilmiştir.

4.6. Örnek

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{ve} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{olsun.}$$

AB matrisi,

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik} b_{kj} \qquad (i = 1, 2, ..., m; \;\; j = 1, 2, ..., n)$$

olmak üzere, $C = (c_{ij})_{3x4}$ matrisidir. Bu durumda,

$$C = AB = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 3.2 + 2.1 & 3.(-1) + 2.2 & 3.0 + 2.3 & 3.1 + 2.1 \\ 1.2 + 1.1 & 1.(-1) + 1.2 & 1.0 + 1.3 & 1.1 + 1.1 \\ 0.2 + 4.1 & 0.(-1) + 4.2 & 0.0 + 4.3 & 0.1 + 4.1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 8 & 1 & 6 & 5 \\ 3 & 1 & 3 & 2 \\ 4 & 8 & 12 & 4 \end{pmatrix}$$

dir.

Şimdi de matris çarpımının bir uygulamasını vereceğiz:

4.7. Örnek

Kredili sistemde okuyan beş öğrencinin dönem sonu ortalamaları hesaplanmak istenmektedir. Öğrencilerin bu dönemdeki toplam dört dersten aldıkları harf notları, derslerin kredileri ve harf notlarının katsayıları aşağıdaki tablolarla verilmiş olsun.

ÖĞRENCİ \ DERS	X_1	X_2	X_3	X_4
I	A	B	B	B
II	C	C	C	D
III	B	C	C	C
IV	C	D	F	D
V	A	A	B	B

DERS	KREDİ
X_1	4
X_2	6
X_3	4
X_4	4
+	18

NOT	KATSAYI
A	4
B	3
C	2
D	1
F	0

Bu tablolara göre III nolu öğrenci, dönem sonunda X_1 dersinden B, X_2, X_3 ve X_4 derslerinden de C harf notu almıştır. Bu döneme ait toplam kredi 18 olduğuna göre, bu öğrencinin dönem sonu ortalamasını hesaplamak için, aldığı herbir dersin kredisi ile harf notunun katsayısının çarpılıp, daha sonra bunlar toplanıp 18'e bölünmesi gereklidir.

Yani, III nolu öğrencinin dönem sonu ortalaması,

$$\frac{\sum_{i=1}^{4} \left(X_i \text{ nin kredisi}\right) . \left(X_i \text{ nin harf notunun katsayısı}\right)}{18}$$

dir. Şimdi bu beş öğrencinin ortalamalarını bir sütun matris olarak hesaplayalım.

$$\begin{array}{cc} A = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 3 & 3 \\ 2 & 2 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 4 & 4 & 3 & 3 \end{pmatrix} & \begin{array}{l} \rightarrow \text{ I. öğrencinin harf notları katsayıları} \\ \rightarrow \text{ II. } \quad " \quad " \quad " \quad " \\ \rightarrow \text{ III. } \quad " \quad " \quad " \quad " \\ \rightarrow \text{ IV. } \quad " \quad " \quad " \quad " \\ \rightarrow \text{ V. } \quad " \quad " \quad " \quad " \end{array} \\ \begin{array}{cccc} \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{array} & \end{array}$$

ve

$$B = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \rightarrow x_1 \text{ in kredisi} \\ \rightarrow x_2 \text{ nin kredisi} \\ \rightarrow x_3 \text{ ün kredisi} \\ \rightarrow x_4 \text{ ün kredisi} \end{array}$$

olmak üzere, $C = \frac{1}{18}(AB)$ matrisi öğrencilerin dönem sonu ortalamaları matrisi olacaktır. Buna göre,

$$AB = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 3 & 3 \\ 2 & 2 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 4 & 4 & 3 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4.4 & + & 3.6 & + & 3.4 & + & 3.4 \\ 2.4 & + & 2.6 & + & 2.4 & + & 1.4 \\ 3.4 & + & 2.6 & + & 2.4 & + & 2.4 \\ 2.4 & + & 1.6 & + & 0.4 & + & 1.4 \\ 4.4 & + & 4.6 & + & 3.4 & + & 3.4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 58 \\ 32 \\ 40 \\ 18 \\ 64 \end{pmatrix}$$

olmak üzere,

$$C = \frac{1}{18}\begin{pmatrix} 58 \\ 32 \\ 40 \\ 18 \\ 64 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3.22 \\ 1.77 \\ 2.22 \\ 1 \\ 3.55 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \rightarrow \text{I. öğrencinin dönem sonu ortalaması} \\ \rightarrow \text{II. \quad " \quad " \quad " \quad "} \\ \rightarrow \text{III. \quad " \quad " \quad " \quad "} \\ \rightarrow \text{IV. \quad " \quad " \quad " \quad "} \\ \rightarrow \text{V. \quad " \quad " \quad " \quad "} \end{array}$$ dır.

4.7. Örnekte kısalık için öğrenci sayısı beş alınmıştır. Öğrenci sayısı ne olursa olsun (100, 1000, ..., n) matris çarpımı ile, bilgisayar kullanılarak öğrencilerin ortalamaları hesaplanabilir.

Aşağıda matris çarpımı işleminin özellikleri verilmiştir:

a) A mxp tipinde, B pxq tipinde ve C qxn tipinde birer matris olsunlar. Bu durumda,

$$(AB)C = A(BC)$$

dir. Bu özelliğe matris çarpma işleminin **birleşme** özelliği denir. Bu özelliğin kanıtı aşağıda verilmiştir.

Kanıt

$AB = D$ ve $BC = E$ diyelim. Bu durumda, iki matrisin çarpımı tanımından,

$$d_{ik} = \sum_{r=1}^{p} a_{ir}\, b_{rk} \qquad (i = 1, 2, ..., m;\ \ k = 1, 2, ..., q)$$

olmak üzere $D = (d_{ik})_{mxq}$ ve

$$e_{rj} = \sum_{k=1}^{q} b_{rk}\, c_{kj} \qquad (r = 1, 2, ..., p;\ \ j = 1, 2, ..., n)$$

olmak üzere $E = (e_{rj})_{pxn}$ dir.

Benzer şekilde, $(AB)C = DC = F$ ve $A(BC) = AE = G$ denilirse,

$$f_{ij} = \sum_{k=1}^{q} d_{ik}\, c_{kj} \qquad (i = 1, 2, ..., m;\ \ j = 1, 2, ..., n)$$

olmak üzere $F = (f_{ij})_{mxn}$ ve

$$g_{ij} = \sum_{r=1}^{p} a_{ir}\, e_{rj} \qquad (i = 1, 2, ..., m;\ \ j = 1, 2, ..., n)$$

olmak üzere $G = (g_{ij})_{mxn}$ dir. Böylece her i, j için $f_{ij} = g_{ij}$ olduğu gösterilirse F ile G matrisinin eşit olduğu, yani $(AB)C = A(BC)$ eşitliği gösterilmiş olur. $f_{ij} = g_{ij}$ olduğunu görmek için her iki öğenin de eşitlerini yazalım:

$$\begin{aligned} f_{ij} &= \sum_{k=1}^{q} d_{ik}\, c_{kj} = \sum_{k=1}^{q} \left(\sum_{r=1}^{p} a_{ir}\, b_{rk} \right) c_{kj} \\ &= \sum_{k=1}^{q} \sum_{r=1}^{p} a_{ir}\, b_{rk}\, c_{kj} \qquad (i = 1, 2, ..., m;\ \ j = 1, 2, ..., n) \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} g_{ij} &= \sum_{r=1}^{p} a_{ir}\, e_{rj} = \sum_{r=1}^{p} a_{ir} \left(\sum_{k=1}^{q} b_{rk}\, c_{kj} \right) \\ &= \sum_{r=1}^{p} \sum_{k=1}^{q} a_{ir}\, b_{rk}\, c_{kj} \\ &= \sum_{k=1}^{q} \sum_{r=1}^{p} a_{ir}\, b_{rk}\, c_{kj} \qquad (i = 1, 2, ..., m;\ \ j = 1, 2, ..., n) \end{aligned}$$

olur. Buradan da her i, j için $f_{ij} = g_{ij}$ olduğu görülür. Dolayısıyla $F = G$ dir. Yani $(AB)C = A(BC)$ dir.

b) A mxp tipinde, B ve C de pxn tipinde matrisler olsunlar. Bu durumda,

$$A(B+C) = AB + AC$$

dir. Bu kural matris çarpımının matris toplamı üzerine dağılımı özelliği olarak adlandırılır.

c) A mxp tipinde ve B pxn tipinde iki matris ve $r, s \in \mathbf{R}$ olsun. Bu durumda,

$$(rA)\,(sB) = (rs)\,AB$$

dir.

(b) ve (c) özelliklerinin kanıtı okuyucuya bırakılıp bu özellikler ile ilgili birer örnek verilmiştir.

4.8. Örnek

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{ve} \quad C = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{ise}$$

A(B+C) = AB + AC eşitliğinin doğru olduğunu gösteriniz.

Çözüm

$$B + C = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{ise} \quad A(B + C) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 7 \\ 2 & 5 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{dir.}$$

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{ve} \quad AC = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{ise}$$

$$AB + AC = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 7 \\ 2 & 5 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{dir. Buradan da}$$

A(B + C) = AB + AC olduğu görülür.

4.9. Örnek

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \text{ve} \quad r = 2, \quad s = -1 \quad \text{ise}$$

(rA) (sB) = (rs)AB eşitliğinin doğru olduğunu gösteriniz.

Çözüm

$$rA = 2\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 6 \\ 4 & 2 & 8 \end{pmatrix} \quad \text{ve} \quad sB = (-1)\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{ise}$$

$$(rA)(sB) = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 6 \\ 4 & 2 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 6 \end{pmatrix} \quad \text{dir. Diğer taraftan,}$$

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ -3 \end{pmatrix} \quad \text{ise} \quad (rs)AB = (-2) \begin{pmatrix} -4 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 6 \end{pmatrix} \quad \text{bulunu}$$

Buradan da $(rA)(sB) = (rs)AB$ olduğu görülür.

d) A, n. mertebeden bir kare matris ise,

$$AI_n = I_nA = A$$

dır. Gerçekten de, $A = (a_{ij})_{nxn}$ ve $I_n = (\delta_{ij})_{nxn}$ olmak üzere, AI_n matrisinin i. satır ve j. sütunundaki öğesi,

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik}\,\delta_{ij}$$

dir. Birim matrisin tanımından $k \neq j$ için $s_{ij} = 0$ ve $k = j$ için $s_{ij} = 1$ olduğundan,

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik}\,\delta_{ij} = a_{ij}$$

olur. Bu eşitlik $i, j = 1, 2, ..., n$ için doğru olduğundan $AI_n = A$ dır. $I_nA = A$ olduğu da benzer şekilde görülebilir.

Not: A ve B matrisleri için hem AB hem de BA işlemleri tanımlı olsa bile genel olarak $AB \neq BA$ dır. Örneğin,

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{ve} \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{olsun.}$$

$$AB = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 7 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{ve} \quad BA = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 6 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

olduğundan $AB \neq BA$ dır.

O halde, çarpılabilir matrisler için matris çarpımının değişme özelliği yoktur, diyebiliriz.

5. İlkel Satır ve Sütun İşlemleri

5.1. Tanım

Bir A matrisi verilsin. A matrisinin satırları (veya sütunları) üzerinde yapılan aşağıdaki üç tip işleme **ilkel satır (veya sütun) işlemleri** denir.

I) A matrisinin herhangi iki satırını (veya sütununu) kendi aralarında yer değiştirmek.
II) A matrisinin herhangi bir satırını (veya sütununu) sıfırdan farklı bir sayı ile çarpmak.
III) A matrisinin herhangi bir satırını (veya sütununu) sıfırdan farklı bir sayı ile çarpıp başka bir satırına (veya sütununa) eklemek.

5.2. Örnek

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 \\ 2 & 4 & 6 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$ matrisine ilkel satır işlemlerini uygulayalım.

A matrisinde 1. satır ile 3. satırın yerleri değiştirildiğinde,

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & 6 & -2 \\ 1 & 2 & 3 & -1 \end{pmatrix}$$ matrisi elde edilir.

A_1 matrisinde 2. satır 1/2 sayısı ile çarpılırsa,

$$A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & -1 \\ 1 & 2 & 3 & -1 \end{pmatrix}$$ matrisi elde edilir.

A_2 matrisinde 3. satır -1 ile çarpılıp 2. satıra eklenirse,

$$A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & -1 \end{pmatrix}$$ matrisi elde edilir.

Bu işlemlere devam edilerek farklı matrisler elde edilebilir. Bu yeni matrisler A matrisine eşit değildir; fakat, A matrisi ile aralarında aşağıda tanımlayacağımız bir ilişki vardır.

5.3. Tanım

A ve B matrisleri aynı tipten iki matris olsun. B matrisi, A matrisi üzerinde yapılacak ilkel satır işlemleri sonucu elde edilebiliyor ise A ile B matrisine **denk matrisler** denir. Bu durum $A \sim B$ şeklinde gösterilir.

Örneğin, 5.2. Örnekte verilen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 \\ 2 & 4 & 6 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

matrisi A_1, A_2 ve A_3 matrislerinin herbirine denktir. Şimdi de

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 6 \end{pmatrix}$$

matrisinin I_3 'e denk olduğunu görelim. A matrisinin 1. satırını -1 ile çarpıp 3. satıra ekleyelim.

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 6 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Elde edilen bu matrisin 2. satırını 2 ile çarpıp 3. satıra ekleyelim.

$$\sim \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Son matrisin 2. satırını (-1) ile çarpıp 2. satıra ekleyelim.

$$\sim \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Bu matrisin 3. satırını (-1) ile çarpıp 1. satıra ekleyelim.

$$\sim \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Son olarak bu matrisin 1. satırını 1/2, 2. satırını (-1) ve 3. satırını 1/3 ile çarpalım.

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I_3$$ elde edilir. Bu nedenle $A \sim I_3$ tür.

6. Bir Matrisin Basamak Biçimi

6.1. Tanım

Bir A matrisinin her bir satırında, sıfırdan farklı bir öğe, içinde bulunduğu satırdan önce gelen satırdaki sıfırdan farklı olan ilk öğenin daha sağında yer alıyorsa A matrisine **basamak matris** denir.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 & 5 \\ 0 & 3 & 1 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \end{pmatrix} \text{ ve } B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

matrisleri basamak matrislere birer örnektir.

Herhangi bir A matrisine ilkel satır işlemleri uygulanarak, A matrisine denk olan basamak matris elde edilebilir. Bu şekilde elde edilen matrise A matrisinin **basamak biçime dönüştürülmüş matrisi** denir.

6.2. Örnek

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$ matrisini basamak biçime dönüştürelim.

A matrisinin 1. satırını -3 ile çarpıp 2. satırına ve yine 1. satırını -1 ile çarpıp 3. satırına ekleyelim.

$$A \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & 4 & 4 \\ 0 & 4 & -6 & -2 & -4 \\ 0 & 2 & -2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Elde edilen matrisin 2. satırını -1/2 ile çarpıp 3. satırına ekleyelim.

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & 4 & 4 \\ 0 & 4 & -6 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$ matrisi A matrisinin basamak biçimidir.

7. Bir Matrisin Rankı

7.1. Tanım

Bir A matrisi verilsin. A matrisinin basamak biçime dönüştürülmüşü olan matrisin, sıfırdan farklı satırları sayısına A matrisinin **rankı** denir ve $r(A)$ ile gösterilir.

Özel olarak, herhangi bir sıfır matrisinin rankı 0 kabul edilir.

7.2. Örnek

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \\ -2 & -4 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$ kare matrisinin rankını bulalım.

A matrisinin 1. satırını 2 ile çarpıp 3. satırına ve 1. satırını -1 ile çarpıp 4. satırına ekleyelim.

$$A \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Elde edilen matriste 3. satır ile 4. satırı yer değiştirelim.

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Bu matriste 2. satırı $1/2$ ile çarpıp 3. satıra ekleyelim.

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 5/2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

matrisinde sıfırdan farklı en az bir eleman içeren satır sayısı 3 olduğundan $r(A)=3$ tür.

n. mertebeden bir köşegen matris basamak biçiminde bir matris olacağından, böyle bir matrisin rankı, köşegen üzerindeki sıfıra eşit olan öğelerin sayısı k ise $n-k$ dır. Örneğin,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

matrisi 5. mertebeden bir köşegen matristir ve $n = 5$, $k = 1$ olduğundan

rank (A) = 5-1 = 4 tür.

Rank tanımından anlaşılacağı gibi, denk matrislerin rankları aynı sayıdır.

Bir matrisin rankı, vektör uzayları ve vektörlerin lineer bağımsızlığı konuları verildikten sonra tekrar incelenecektir.

8. Blok Matrisler

Blok matrisi tanımlamadan önce, bu tanımda gerekli olan alt matris kavramını verelim. Bir $A = (a_{ij})_{mxn}$ matrisinde, k tane satır ve l tane sütun çıkarıldığında elde edilen $(m - k) \times (n - l)$ tipindeki yeni matrise A matrisinin **alt matrisi** denir. Örneğin,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 & 4 \\ 6 & 7 & 8 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & -4 & -5 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

matrisinde, 3. satır ve 2. ile 4. sütunlar çıkarıldığında elde edilen

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 6 & 8 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$ matrisi A nın bir alt matrisidir.

8.1. Tanım

Bir

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

matrisini,

$r_1 + r_2 + ... + r_p = m$, $s_1 + s_2 + ... + s_q = n$ ve

$$A_{kl} = (a_{ij})_{r_k x s_k} \qquad (k = 1, 2, ..., p \,;\; l = 1, 2, ..., q)$$

ler A nın alt matrisleri olmak üzere

$$\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1q} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2q} \\ \vdots & & & \\ A_{p1} & A_{p2} & \cdots & A_{pq} \end{pmatrix}$$

şeklinde yazabiliriz. Bu yazım şekline A matrisinin **bloklara ayrılması** denir.

8.2. Örnek

$$A = \left(\begin{array}{cc|ccc|c} 1 & 2 & 0 & -1 & 3 & 4 \\ 3 & 5 & 6 & 0 & 6 & 5 \\ \hline 2 & 1 & 2 & 2 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 2 & -3 \end{array}\right) \qquad \text{matrisini}$$

$$A_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} , \quad A_{12} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 3 \\ 6 & 0 & 6 \end{pmatrix} , \quad A_{13} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$A_{21} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} , \quad A_{22} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} , \quad A_{23} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$$

olmak üzere

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \end{pmatrix} \quad \text{şeklinde yazabiliriz.}$$

Burada, $p = 2$, $q = 3$, $r_1 = r_2 = 2$, $s_1 = 2$, $s_2 = 3$, $s_3 = 1$ dir.

9. Bir Kare Matrisin Tersi

9.1. Tanım

A, n. mertebeden bir kare matris olsun. Eğer,

$$AB = I_n \quad \text{ve} \quad BA = I_n$$

olacak şekilde n. mertebeden bir B kare matrisi var ise, B matrisine A matrisinin **tersi** denir.

A kare matrisinin tersinin olabilmesi için $AB = I_n$ ve $BA = I_n$ koşullarından yalnızca birinin sağlanması yeterlidir. Ayrıca, A nın tersi var ise bu tektir ve ters matris A^{-1} ile gösterilir. Bir kare matrisin tersi var ise tek olduğunu aşağıdaki şekilde gösterebiliriz:

A, n. mertebeden bir kare matris ve B ile C matrisleri de A matrisinin ters matrisi olsunlar. B ile C nin eşit matrisler olduğunu göstermeliyiz.

$AB = I_n$ ve $CA = I_n$ dir. (Ters matris tanımından)

Diğer taraftan,

$$\begin{aligned} (CA)\,B &= C\,(AB) \quad \text{dir. (Çarpma işleminin birleşme özelliğinden)} \\ I_n B &= CI_n \\ B &= C \end{aligned}$$

elde edilir.

Aşağıda matris tersi ile ilgili iki örnek verilmiştir:

9.2. Örnek

$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ matrisi verilsin. $B = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ matrisinin, A'nın tersi olduğunu gösterelim. Gerçekten,

$$AB = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2$$

ve

$$BA = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2$$

olduğundan $B = A^{-1}$ dir.

9.3. Örnek

$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ olsun. A matrisinin tersi var mıdır?

Çözüm

$AB = I_2$ olacak şekilde bir $B = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$ matrisinin olup olmadığını araştıracağız.

Eğer böyle bir B matrisi varsa, AB = I_2 eşitliğinden, $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ olmalıdır.

Çarpma işlemini yaparsak, $\begin{pmatrix} x-z & y-t \\ -x+z & -y+t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ elde edilir.

İki matrisin eşitliği tanımından,

$$\begin{matrix} x-z = 1 \\ -x+z = 0 \end{matrix} \quad \text{ve} \quad \begin{matrix} y-t = 0 \\ -y+t = 1 \end{matrix}$$

olmalıdır. Fakat bu eşitlikleri sağlayan x, y, z ve t sayıları olmadığından AB = I_2 koşulunu sağlayacak B matrisi bulunamaz. Dolayısıyla A matrisinin tersi yoktur.

Not: Eğer A = (a) ise $a \neq 0$ iken A^{-1} vardır ve $A^{-1} = \left(\frac{1}{a}\right)$ dir.

Aşağıda, bir kare matrisin tersini, ilkel satır işlemleri yardımıyla elde edebileceğimiz bir yöntem vereceğiz. Önce yöntemde kullanılacak olan ilkel matrisi kavramını tanımlayalım.

9.4. Tanım

I_n birim matrisine, ilkel satır işlemlerinin herhangi bir tipi uygulandığında elde edilen matrise **bir ilkel matris** denir.

n. mertebeden bir A kare matrisine birinci tip ilkel satır işlemi uygulandığında elde edilen matrise A_1, I_n birim matrisine aynı ilkel satır işlemi uygulandığında elde edilen ilkel matrise de E_1 dersek $A_1 = E_1 A$ dır.

Örneğin,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

matrisinin 1. satırı ile 3. satırını yer değiştirelim.

Bu durumda

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 \\ 3 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

dir. Diğer taraftan I_3'e aynı ilkel satır işlemini uygularsak

$$E_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

olur. Buradan,

$$E_1\,A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 \\ 3 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} = A_1$$

olduğu görülür.

Benzer şekilde bir A kare matrisine ikinci tip ilkel satır işlemi uygulandığında elde edilen matris A_2 ve I_n'e aynı ilkel satır işlemi uygulandığında elde edilen matris E_2 ise $E_2\,A = A_2$ dir. Yine A matrisine üçüncü tip ilkel satır işlemi uygulandığında elde edilen matris A_3 ve I_n'e aynı ilkel satır işlemi uygulandığında elde edilen ilkel matris E_3 ise $E_3\,A = A_3$ dür.

Şimdi yöntemi verelim:

A, n. mertebeden bir kare matris olmak üzere, A matrisinin yanına I_n birim matrisini ekleyerek nx2n tipinde bir B matrisi oluşturalım.

$$B = \left(\begin{array}{cccc|cccc} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{array}\right)$$

dir. B matrisine ilkel satır işlemleri uygulayarak, A matrisinin yerinde I_n birim matrisini elde edelim. Bu işlemler sonucunda I_n nin yerinde oluşan yeni matris, A matrisinin tersidir. Aşağıda bu yöntem açıklanmıştır:

A matrisine, ard arda sonlu sayıda ilkel satır işlemlerini uygulayarak, I_n birim matrisini elde edelim. Bu durumda,

$$E_i\,E_j\,E_k\,\ldots\,E_i\,E_j\,E_k\,A = I_n \qquad (1 \le i \le 3\,, \quad 1 \le j \le 3\,, \quad 1 \le k \le 3)$$

olur. Diğer taraftan $I_n\,A = A$ olduğundan yukarıdaki eşitlikte A yerine $I_n\,A$ yazalım.

$$E_i\,E_j\,E_k\,\ldots\,E_i\,E_j\,E_k\,I_n\,A = I_n$$

dir. $E_i\,E_j\,E_k\,\ldots\,E_i\,E_j\,E_k\,I_n = C$ dersek,

$$CA = I_n$$

eşitliğinden $A^{-1} = C$ olur. C matrisine dikkat edecek olursak, bu matris, I_n birim matrisine, A matrisine uygulanan ilkel satır işlemlerinin aynı sırada uygulanması ile elde edilen matristir. Dolayısıyla $B = (A , I_n)$ matrisinde, A matrisine ilkel satır işlemleri uygulayarak birim matrisi elde ettiğimizde, I_n'e de aynı işlemleri uygulayarak elde ettiğimiz matris, A nın tersi olan A^{-1} matrisidir.

9.5. Örnek

$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -4 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ matrisinin tersini ilkel satır işlemleri ile bulalım.

$$B = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 3 & -4 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

matrisinde 1. satırın -1/2 katını 2. satıra ekleyelim.

$$B \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 3 & -4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3/2 & 3 & -1/2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

dir. Bu matrisin 2. satırını -2/3 ile çarpalım.

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 3 & -4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1/3 & -2/3 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

olur. Elde edilen bu matriste 2. satırın 2 katını 3. satıra ekleyelim.

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 3 & -4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1/3 & -2/3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 2/3 & -4/3 & 1 \end{array}\right)$$

bulunur. Bu matriste 2. satırının -3 katını 1. satıra ekleyelim, 3. satırını -1/3 ile çarpalım.

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1/3 & -2/3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2/9 & 4/9 & -1/3 \end{array}\right)$$

elde edilir. Son elde edilen matrisin 3. satırın -2 katını 1. satıra, 3. satırın 2 katını 2. satıra ekleyelim.

$$\sim\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 0 & 4/9 & 10/9 & 2/3 \\ 0 & 1 & 0 & -1/9 & 2/9 & -2/3 \\ 0 & 0 & 1 & -2/9 & 4/9 & -1/3 \end{array}\right)$$

bulunur. Son olarak, 1. satırı 1/2 ile çarpalım.

$$\sim\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 2/9 & 5/9 & 1/3 \\ 0 & 1 & 0 & -1/9 & 2/9 & -2/3 \\ 0 & 0 & 1 & -2/9 & 4/9 & -1/3 \end{array}\right)$$

olur. Bu son matriste A matrisinin yerinde I_3 elde edilmiştir. Dolayısıyla I_3 ün yerinde elde edilen

$$\begin{pmatrix} 2/9 & 5/9 & 1/3 \\ -1/9 & 2/9 & -2/3 \\ -2/9 & 4/9 & -1/3 \end{pmatrix}$$

matrisi A nın ters matrisidir.

9.6. Örnek

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{ise } A^{-1} = ?$$

Çözüm

$$B = \left(\begin{array}{cccc|cccc} -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

dir. B matrisinde, 1. satır ile 2. satırı toplayıp 2. satıra, 1. satır ile 3. satırı toplayıp 3. satıra, 1. satır ile 4. satırı toplayıp 4. satıra ekleyelim.

$$B \sim \left(\begin{array}{cccc|cccc} -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

olur. Bu matrisin 2. satırı ile 3. satırını yer değiştirelim.

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|cccc} -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

dir. Elde edilen bu matrisin 2. satırının -1 katını 4. satıra ekleyelim.

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|cccc} -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -2 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

bulunur. Bu matrisin 3. satırının -1 katını 4. satıra ekleyelim.

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|cccc} -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4 & -1 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

elde edilir. Elde edilen bu son matriste 3. satırın -1/2 katını 1. satıra, 4. satırın 1/2 katını 2. satıra ekleyelim.

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|cccc} -1 & 1 & 0 & 0 & 1/2 & -1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 1/2 & 1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4 & -1 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

bulunur. Bu matriste, 4. satırın 1/2 katını 3. satıra, 2. satırın -1/2 katını 1. satıra ekleyelim.

$$\sim\left(\begin{array}{cccc|cccc} -1 & 0 & 0 & 0 & 1/4 & -1/4 & -1/4 & -1/4 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 1/2 & -1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 1/2 & 1/2 & -1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & -4 & -1 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

dir. Son olarak 1. satırı -1 ile, 2. satırı 1/2 ile, 3. satırı 1/2 ile ve 4. satırı -1/4 ile çarpalım.

$$\sim\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & -1/4 & 1/4 & 1/4 & 1/4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1/4 & -1/4 & 1/4 & 1/4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1/4 & 1/4 & -1/4 & 1/4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1/4 & 1/4 & 1/4 & -1/4 \end{array}\right)$$

bulunur. O halde,

$$A^{-1} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

matrisidir.

9.7. Örnek

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$ matrisinin tersini bulmaya çalışalım.

$$B = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & -1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

matrisinde 1. satırın -1/2 katını 2. satıra ekleyelim ve 1. satır ile 3. satırı toplayıp 3. satıra yazalım.

$$B \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & -1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3/2 & 0 & -1/2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Bu matrise göre rank (A) = 2 dir. Diğer taraftan rank (I_3) = 3 olduğuna göre, A matrisinden hareketle ilkel satır işlemleri ile I_3 matrisi elde edilemez. Çünkü A matrisi ile I_3 birim matrisinin rankları farklı olduğu için denk matrisler değillerdir. Dolayısıyla A matrisinin tersi yoktur.

Değerlendirme Soruları

Aşağıdaki soruların yanıtlarını verilen seçenekler arasından bulunuz.

1. $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 & 5 & 6 \\ 2 & 0 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 5 & 7 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ matrisinin a_{23} öğesi aşağıdakilerden hangisidir?

A. -1
B. 1
C. 2
D. 5
E. 7

2. $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & x+y & 0 \\ 3 & 4 & 5 & 0 \\ x-y & 6 & 7 & -5 \end{pmatrix}$ matrisi, x ve y nin hangi değerleri için altüçgensel bir matristir?

A. x= -y
B. x= y
C. y= 1-x
D. y= 1+x
E. $x \neq y$

3. $2\begin{pmatrix} -2 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ işleminin sonucu aşağıdakilerden hangisidir?

A. $\begin{pmatrix} -1 & 2 & 12 & 1 \\ 2 & 3 & 8 & 6 \end{pmatrix}$

B. $\begin{pmatrix} -7 & 2 & 0 & 7 \\ 2 & -3 & -4 & -6 \end{pmatrix}$

C. $\begin{pmatrix} -1 & 1 & 5 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$

D. $\begin{pmatrix} -1 & 2 & 12 & 1 \\ 2 & 3 & 7 & 6 \end{pmatrix}$

E. $\begin{pmatrix} -7 & 2 & 0 & 7 \\ 2 & 3 & 8 & 6 \end{pmatrix}$

4. $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ matrisi aşağıdakilerden hangisidir?

A. (1)

B. (0)

C. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 \\ -1 & -2 & -1 & 1 \\ 2 & 4 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

D. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 \\ -1 & -2 & -1 & 1 \\ 2 & 4 & 2 & -2 \\ -1 & 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

E. $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 2 & -2 & 4 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$

5. Aşağıdaki matrislerden hangisi transpozesine eşittir?

A. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

B. $\begin{pmatrix} 5 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & 2 \\ 1 & -2 & 5 \end{pmatrix}$

C. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 1 & 3 \\ -3 & -3 & 1 \end{pmatrix}$

D. $\begin{pmatrix} 5 & 4 & -6 \\ 4 & 0 & 1 \\ -6 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

E. $\begin{pmatrix} 4 & 5 & 6 \\ -5 & 2 & 4 \\ 6 & 4 & 4 \end{pmatrix}$

6. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 4 & 2 \end{pmatrix}$ matrisinin rankı aşağıdaki sayılardan hangisidir?

A. 0

B. 1

C. 2

D. 3

E. 4

7. Aşağıdaki matrislerden hangisi I_4'e denktir?

A. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 2 & 4 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

B. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

C. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

D. $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 2 & -3 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 3 & -1 \end{pmatrix}$

E. $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

8. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ matrisinin tersi aşağıdakilerden hangisidir?

A. $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

B. $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

C. $\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

D. $\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

E. $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

9. $\begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ işleminin sonucu aşağıdakilerden hangisidir?

A. (6)

B. (9)

C. $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 6 & -2 & 4 \\ 12 & -4 & 8 \end{pmatrix}$

D. (0 -2 8)

E. $\begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 8 \end{pmatrix}$

10. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ matrisleri veriliyor.

$A = BX$ matris eşitliğini sağlayan X matrisi aşağıdakilerden hangisidir?

A. $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ B. $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

C. $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ D. $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

E. $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

11. A bir kare matris olmak üzere, aşağıdaki ifadelerden hangisi her zaman doğrudur?

A. AA^t simetrik bir matristir. B. $A - A^t$ simetrik bir matristir.
C. $A + A^t$ ters simetrik bir matristir. D. $A A^t$ skaler bir matristir.
E. $A - A^t$ alt üçgensel bir matristir.

12. $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 7 & 2 & 4 \\ -1 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ matrisinin öğeleri kullanılarak yapılan $a_{12} - a_{13} + 2a_{42} + 2a_{43}$ işleminin sonucu nedir?

A. 12 B. 9
C. 7 D. 5
E. 2

13. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1+x & 0 \\ 2-x & 0 & 0 \end{pmatrix}$ matrisinin köşegen matris olması için x ne olmalıdır?

A. -2 B. -1
C. 0 D. 1
E. 2

14. A, 5x7 tipinde bir matris olmak üzere, $AB - 2I_5$ işleminin yapılabilmesi için, B hangi tipte bir matris olmalıdır?

A. 5x5 B. 7x7
C. 7x5 D. 5x7
E. Hiçbiri

15. $$\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 4 & 6 & 1 \\ 6 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} -2 \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & a-b \\ 2 & a+b & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & -3 & 2 \\ -2 & 1 & -3/2 \\ -3 & 4 & 0 \\ -4 & 2 & 1/2 \end{pmatrix}$$ ise

a ve b nin değerleri aşağıdakilerden hangisidir?

A. $a = 1$
$b = -1$

B. $a = -1$
$b = 1$

C. $a = -1/2$
$b = -1/2$

D. $a = 1/2$
$b = 1/2$

E. $a = -1/2$
$b = 1/2$

16. $$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

matrisinin tersi varsa, aşağıdakilerden hangisidir?

A. $$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & -3 \\ 0 & -1 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

B. $$1/2\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & -3 \\ 0 & -1 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

C. $$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & 0 & -3 \\ 2 & -1 & -2 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

D. $$1/4\begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

E. A matrisinin tersi yoktur.

17. $\begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

matrisinin tersi varsa, aşağıdakilerden hangisidir?

A. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 4 & -3/2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

B. $1/2\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 4 & -3/2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

C. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & -3/2 & -1 & 1/2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$

D. $1/2\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & -3/2 & -1 & 1/2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$

E. A matrisinin tersi yoktur.

Değerlendirme Sorularının Yanıtları

1. B 2. A 3. B 4. C 5. D 6. D 7. E 8. E 9. A 10. E
11. A 12. D 13. E 14. C 15. C 16. E 17. B