MAT 102 **ARASINAV** **26 KASIM 2011**

SORU 1 Aşağıdaki boşluklar öğrenci tarafından doldurulacaktır.

Öğrenci No:	Elektronik posta (e-mail) adresi:	Grup No:	Sıra No:	Puan
Adı:	Soyadı:		İmza:	

Lütfen bu soruyu yalnız bu kağıdın ön yüzünü ve gerekirse arka yüzünü kullanarak cevaplandırınız.

[12pt] **a)** Genel terimi $\mathbf{a_n} = \left(\dfrac{\mathbf{3n-1}}{\mathbf{3n+2}}\right)^{\mathbf{n}}$ olan $\{\mathbf{a_n}\}$ dizisinin limitini bulunuz.

[13pt] **b)** Genel terimi $\mathbf{a_n} = \displaystyle\sum_{\mathbf{k=1}}^{\mathbf{n}} \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{(2k-1)(2k+1)}}$ olan dizinin yakınsaklığını Azalmayan Diziler Teoremini kullanarak inceleyiniz.

ÇÖZÜM:

a) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{3}{3n+2}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left[\left(1-\frac{3}{3n+2}\right)^{3n+2-2}\right]^{\frac{1}{3}}$

$\displaystyle = \lim_{n\to\infty}\left[\left(1-\frac{3}{3n+2}\right)^{3n+2}\left(1-\frac{3}{3n+2}\right)^{-2}\right]^{1/3} = \left(e^{-3}\cdot 1\right)^{1/3}$

$= e^{-1} = \boxed{\dfrac{1}{e}}$

b) $\displaystyle\frac{1}{(2k-1)(2k+1)} = \frac{A}{2k-1} + \frac{B}{2k+1}$, $\boxed{A = 1/2}$, $\boxed{B = -1/2}$

$\displaystyle a_n = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\left[\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k+1}\right] = \frac{1}{2}\left[\left(1-\cancel{\tfrac{1}{3}}\right)+\left(\cancel{\tfrac{1}{3}}-\cancel{\tfrac{1}{5}}\right)+\cancel{\cdots}+\left(\cancel{\tfrac{1}{2n-1}}-\tfrac{1}{2n+1}\right)\right]$

$\displaystyle a_n = \frac{n}{(2n+1)}$

$\displaystyle a_{n+1} - a_n = \frac{n+1}{(2n+3)} - \frac{n}{(2n+1)} = \frac{1}{(2n+1)(2n+3)} > 0$, $\{a_n\}$ azalmay

$\displaystyle a_n = \frac{n}{(2n+1)} < 1$

$\{a_n\}$ azalmayan ve üstten sınırlı bir dizi olduğundan yakınsaktır.

MAT 102 ARASINAV 26 KASIM 2011

SORU 2 Aşağıdaki boşluklar öğrenci tarafından doldurulacaktır.

Öğrenci No:	Elektronik posta (e-mail) adresi:	Grup No:	Sıra No:	Puan
Adı:	Soyadı:		İmza:	

Lütfen bu soruyu yalnız bu kağıdın ön yüzünü ve gerekirse arka yüzünü kullanarak cevaplandırınız.

[10pt] **a)** $\sum_{n=3}^{\infty}\left(\sqrt{n^2+4n}-\sqrt{n^2-3n}\right)$ serisi yakınsak mıdır? Yanıtınızı açıklayınız.

[15pt] **b)** $2x+3y-z=7$ düzlemine paralel olan ve

$$x=1+2t\ ,\ y=2-t\ ,\ z=3t \quad ; \quad x=5+s\ ,\ y=-s\ ,\ z=6+2s$$

doğrularının arakesit noktasından geçen düzlemin denklemini yazınız.

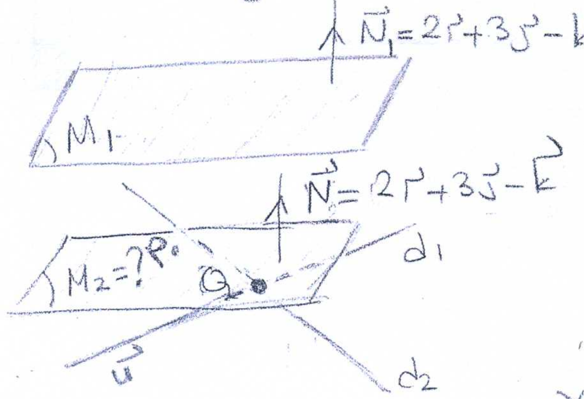
Çözüm:

a) $$a_n=\frac{\left(\sqrt{n^2+4n}-\sqrt{n^2-3n}\right)\left(\sqrt{n^2+4n}+\sqrt{n^2-3n}\right)}{\sqrt{n^2+4n}+\sqrt{n^2-3n}}=\frac{\cancel{n^2}+4n-(\cancel{n^2}-3n)}{\sqrt{n^2+4n}+\sqrt{n^2-3n}}$$

$$=\frac{7n}{\sqrt{n^2+4n}+\sqrt{n^2-3n}}\ , \quad \boxed{\lim_{n\to\infty} a_n=\frac{7}{2}\neq 0}$$

n. terim testine göre ıraksaktır.

b)



$M_1 // M_2$ olduğundan $\boxed{\vec{N}=2\vec{i}+3\vec{j}-\vec{k}}$

d_1: $x=1+2t,\ y=2-t,\ z=3t$

d_2: $x=5+s,\ y=-s,\ z=6+2s$

x: $1+2t=5+s \Rightarrow 2t-s=4$

y: $2-t=-s \Rightarrow t-s=2$

z: $3t=6+2s \Rightarrow 3t-2s=6$

$\boxed{t=2}$ $\boxed{s=0}$

$Q(x_0,y_0,z_0)=(5,0,6)$

$P(x,y,z)$, aranan düzlemde herhangi nokta olmak üzere,

$$\vec{QP}\cdot\vec{N}=0$$

$$2(x-5)+3(y-0)+(-1)(z-6)=0$$

veya $\boxed{2x+3y-z=4}$

MAT 102 ARASINAV 26 KASIM 2011

SORU 3 Aşağıdaki boşluklar öğrenci tarafından doldurulacaktır.

Öğrenci No:	Elektronik posta (e-mail) adresi:	Grup No:	Sıra No:	Puan
Adı:	Soyadı:		İmza:	

Lütfen bu soruyu yalnız bu kağıdın ön yüzünü ve gerekirse arka yüzünü kullanarak cevaplandırınız.

[15pt] **a)** $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(5-2x)^n}{n \ln n}$ kuvvet serisinin **i)** yakınsaklık aralığını,

ii) mutlak yakınsaklık aralığını,

iii) yakınsaklık yarıçapını bulunuz.

[10pt] **b)** $f(x) = \sin^2\left(\frac{x}{2}\right)$ fonksiyonunun Maclaurin serisini yerine koyma yöntemi ile bulunuz.

ÇÖZÜM:

a) $\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = |5-2x| \lim_{n\to\infty} \frac{n \ln n}{(n+1)\ln(n+1)} = |5-2x| < 1$

$\boxed{2 < x < 3}$

$a_n = f(n) \Rightarrow f(x) = \frac{1}{x \ln x} > 0$

$f'(x) < 0$, $x > 2$ için $f(x)$ sürekli

$x = 2$ ise, $a_n = \frac{1}{n \ln n}$,

$a_{n+1} = \frac{1}{(n+1)\ln(n+1)} < \frac{1}{n \ln n} = a_n$

$a_n = \frac{1}{n \ln n} > 0$

$a_n = \frac{1}{n \ln n}$, $n > 2$ için sürekli

Integral Testine göre,

$\int_2^{\infty} \frac{1}{x \ln x} dx = \lim_{b\to\infty} \int_2^b \frac{1}{x \ln x} dx = \lim_{b\to\infty} \int_u \frac{du}{u} = \lim_{b\to\infty} \ln(\ln x)\Big|_2^b = \infty$,

$\int_2^{\infty} f(x)\,dx$ ıraksak olduğundan $\sum_{n=2}^{\infty} a_n$ serisi de ıraksaktır.

$x = 3$ ise, $a_n = (-1)^n \boxed{\frac{1}{n \ln n}}$, $u_n = \frac{1}{n \ln n}$ olsun. i) $u_n > 0$

ii) $u_{n+1} < u_n$

iii) $u_n \to 0$

Leibniz testine göre,

$\sum_{n=2}^{\infty} a_n = \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n \ln n}$ yakınsaktır.

$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(5-2x)^n}{n \ln n}$ kuvvet serisi:

$2 < x < 3$ aralığında mutlak yakınsak

$2 < x \leq 3$ aralığında yakınsaktır.

$R = 1/2$: yakınsaklık yarıçapı.

3-b) $\sin^2\frac{x}{2} = \frac{1-\cos x}{2}$

$\cos x$'in Maclaurin serisi:

$\sum_{n=0}^{\infty} f^{(n)}(0)\frac{x^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$ olduğuna göre,

$\sin^2\frac{x}{2} = \frac{1}{2} - \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{2(2n)!} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{2(2n)!}$

MAT 102 ARASINAV 26 KASIM 2011

SORU 4 Aşağıdaki boşluklar öğrenci tarafından doldurulacaktır.

Öğrenci No:	Elektronik posta (e-mail) adresi:	Grup No:	Sıra No:	Puan
Adı:	Soyadı:		İmza:	

Lütfen bu soruyu yalnız bu kağıdın ön yüzünü ve gerekirse arka yüzünü kullanarak cevaplandırınız.

[15pt] **a)** $\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n\left(\sqrt[n]{5}-1\right)$ serisi koşullu yakınsak mıdır? Yanıtınızı açıklayınız.

[10pt] **b)** Her $(x,y)\neq(0,1)$ için $f(x,y)=x(y-1)\frac{x^2-2y^2+4y-2}{x^2+y^2-2y+1}$ olsun. $f(x,y)$ fonksiyonunun $(0,1)$ noktasında sürekli olması için $f(0,1)$ nasıl tanımlanmalıdır? Yanıtınızı açıklayınız.

a) $|a_n|=\left|(-1)^n\left(\sqrt[n]{5}-1\right)\right|=\sqrt[n]{5}-1$

$b_n=\frac{1}{n}$ olsun

$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{5}-1}{\frac{1}{n}}=\frac{0}{0}$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{-\cancel{\frac{1}{n^2}}\sqrt[n]{5}\ln 5}{\cancel{-\frac{1}{n^2}}}=\ln 5\quad(\neq\pm\infty,0),$

$\sum_{n=2}^{\infty}a_n$ ve $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^{p=1}}$ ikisi birden yakınsar veya ıraksar.

$\sum_{2}^{\infty}\frac{1}{n^{p=1}}$ harmonik serisi ıraksak olduğundan $\sum_{n=2}^{\infty}a_n$ serisi de ıraksaktır.

$\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n\left(\sqrt[n]{5}-1\right)$, i) $u_n=\sqrt[n]{5}-1>0$

ii) $u_n'=-\frac{1}{n^2}\sqrt[n]{5}.\ln 5<0$, u_n azalan.

iii) $\lim_{n\to\infty}u_n=\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt[n]{5}-1\right)=0$

Leibniz testine göre yakınsaktır.

$\sum_{n=2}^{\infty}a_n$ şartlı (koşullu) yakınsaktır

4-b) $f(x,y) = x(y-1)\dfrac{x^2-2(y^2-2y+1)}{x^2+(y-1)^2} = x(y-1)\dfrac{x^2-2(y-1)^2}{x^2+(y-1)^2}$

$$\lim_{(x,y)\to(0,1)} f(x,y) = \lim_{r\to 0} r^2\cos\theta.\sin\theta \frac{\cancel{r^2}\left[\cos^2\theta-2\sin^2\theta\right]}{\cancel{r^2}\underbrace{\left[\cos^2\theta+\sin^2\theta\right]}_{1}} = 0$$

$$\begin{pmatrix} x = r\cos\theta \\ y-1 = r\sin\theta \end{pmatrix}$$

$f(x,y)$'nin $(0,1)$'de sürekli olması için

$\boxed{f(0,1)=0}$ olmalıdır.

$$\lim_{(x,y)\to(0,1)} f(x,y) = 0 = f(0,1)$$