6. BÖLÜM

DİZİLER ve SERİLER

6.1. Dizi Kavramı

Matematikte kullandığımız dizi sözcüğü ile günlük hayatta kullandığımız dizi sözcüğü aslında birbirlerinden çok farklı değildir. Bu bölümde dizilerin matematiksel teorisini inceleyeceğiz.

6.1.1. Tanım: Tanım kümesi pozitif tam sayılar olan fonksiyonlara dizi denir.

Bu tanıma göre, $f:\mathbb{N}\to\mathbb{R},\ y=f(n)$ fonksiyonu bir dizidir. Bu fonksiyonun değer kümesi reel sayılar olduğundan bu diziye *reel değerli dizi* veya kısaca *reel dizi* adı verilir. Örneğin dizinin değer kümesi kompleks sayılar olsa bu diziye de *kompleks dizi* adını veririz (bu dizilerle şimdilik uğraşmayacağız). Bu derste dizi dediğimiz zaman reel dizilerden bahsedildiği anlaşılacaktır.

6.1.2. Örnek: *i.* $f:\mathbb{N}\to\mathbb{R},\ f(n)=1$ sabit fonksiyonu bir dizidir. Bu fonksiyonun aldığı değerler

$$f(1)=1,\ f(2)=1,\ f(3)=1,\ ...,\ f(n)=1,\ ...$$

olarak yazılır.

ii. $f:\mathbb{N}\to\mathbb{R},\ f(n)=(-1)^n$ fonksiyonu bir dizidir. Bu fonksiyonun değer kümesindeki elemanlar

$$f(1)=-1,\ f(2)=1,\ f(3)=-1,\ ...,\ f(n)=(-1)^n,\ ...$$

olarak yazılır (Burada şu hatırlatmayı yapmak uygun olacaktır: $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=(-1)^x$ bir fonksiyon değildir).

iii. Kuralı $f(n) = \dfrac{1}{n-1}$ olan fonksiyonu gözönüne alalım. Bu fonksiyonun tanım kümesi pozitif tam sayılar olmadığından bir dizi değildir.

Dizinin tanım kümesindeki bir n sayısına değer kümesinde karşılık gelen elemanı a_n ile gösterelim. Bu gösterimi dikkate alarak diziyi $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, $f(n) = a_n$ veya, fonksiyonları belirtirken sadece kuralı vermenin yeterli olduğunu düşünerek, kısaca $f(n) = a_n$ ile gösteririz. Buna göre dizinin elemanları

$$f(1) = a_1,\ f(2) = a_2,\ ...,\ f(n) = a_n,\ ...$$

olarak yazılır. Bu sırayı koruyarak dizinin elemanlarını

$$(a_1,\ a_2,\ ...,\ a_n, ...)$$

şeklinde yazarız. $(a_1,\ a_2,\ ...,\ a_n, ...)$ yi kısa olarak (a_n) ile gösteririz. Bundan sonra dizileri (a_n) ile göstereceğiz. Eğer bir diziyi

$$(a_n) = (a_1,\ a_2,\ ...,\ a_n, ...)$$

ile gösterirsek $a_1,\ a_2,\ ...,\ a_n, ...$ ye dizinin terimleri diyeceğiz. a_1 e dizinin birinci terimi, a_2 ye dizinin ikinci terimi, ..., a_n ye de dizinin n.terimi (veya genel terimi veya dizinin kuralı) adı verilir. Demek ki, dizinin tanım kümesindeki 1 e değer kümesinde karşılık gelen değere dizinin birinci terimi, 2 ye karşılık gelen değere dizinin ikinci terimi, bu şekilde devamla, n ye karşılık gelen değere de dizinin n.terimi adı verilir. Karşılıklı terimleri eşit olan dizilere eşit diziler, aksi durumda bu dizilere farklı diziler denir.

6.1.3. Örnek: Bir dizinin ilk beş terimi

$$1,\ 2,\ 3,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{3}$$

şeklinde veriliyor. Buna göre

$$a_1 = 1,\ a_2 = 2,\ a_3 = 3,\ a_4 = \frac{1}{2},\ a_5 = \frac{1}{3}$$

yazılır. Diğer bir dizinin ilk beş terimi de

$$2,\ 1,\ 3,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{3}$$

olarak veriliyor. Buna göre

$$b_1 = 2,\ b_2 = 1,\ b_3 = 3,\ b_4 = \frac{1}{2},\ b_5 = \frac{1}{3}$$

yazılır.

Bu örnekteki birinci ve ikinci dizinin yazılmayan terimlerinin eşit olduğunu kabul ederek bu dizilerin terimlerinden oluşan kümeyi sırasıyla A ve B ile gösterelim. Bu iki küme eşit olmasına rağmen bu diziler (fonksiyon olarak) eşit değildir. Onun için diziyi belirtirken dizinin elemanları arasındaki sıralama oldukça önemlidir. Hatta diziyi gösterirken kullandığımız $(,)$ parantezler sanki, dizinin sıralı bir sonsuz terimler topluluğu olduğunu vurgular. Bazı kaynaklar, dizinin elemanları arasındaki sıralamanın öneminin bilindiğini kabul ederek, dizinin terimlerini $\{,\}$ parantezleri arasına yine sıralamayı dikkate alarak yazar.

Dizileri tam olarak belirtmenin en güzel yolu genel terimin bilinmesidir. Aksi halde, genel terimi dikkate almaksızın, bir kaç terime bakarak diziler hakkında karar vermek yanlış olur. Örneğin ilk beş terimi

$$1,\ 2,\ 3,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{3}$$

olan iki diziyi dikkate alalım. Bu terimlere bakarak bu iki dizinin eşit olduğunu söylemek doğru olmaz. Çünkü bu dizilerden birisi

$$1,\ 2,\ 3,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ \frac{1}{4},\ 4,\ 5,\ ...$$

diğeri ise

$$1,\ 2,\ 3,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ 4,\ \frac{1}{4},\ \frac{1}{5},\ ...$$

olabilir.

6.1.4. Örnek: Aşağıda verilen dizilerin genel terimini, ilk dört terimini ve onbeşinci terimini yazınız.

i. $\left(\frac{n}{n+1}\right)$ *ii.* $\left(2 + (\frac{1}{2})^n\right)$ *iii.* $\left((1 + \frac{1}{n})^n\right)$

Çözüm: *i.* Dizinin genel terimi $a_n = \dfrac{n}{n+1}$ dir. İlk dört terimi bulmak için n yerine sırasıyla 1, 2, 3 ve 4 sayılarını yazmak gerekir. Böylece

$$a_1 = \frac{1}{2},\ a_2 = \frac{2}{3},\ a_3 = \frac{3}{4},\ a_4 = \frac{4}{5}$$

bulunur. On beşinci terimi bulmak için ise $n = 15$ alınarak $\frac{15}{16}$ elde edilir.

ii. Dizinin genel terimi (veya kuralı) $a_n = 2 + (\frac{1}{2})^n$ dir. İlk dört terimi sırasıyla

$$\frac{5}{2},\ \frac{9}{4},\ \frac{17}{8},\ \frac{33}{16}$$

olarak bulunur. On beşinci terim ise genel terimde $n = 15$ alınırsa $a_{15} = 2 + (\frac{1}{2})^{15}$ olur.

iii. Dizinin genel terimi $(1 + \frac{1}{n})^n$ dir. İlk dört terimi ise

$$2,\ \frac{9}{4},\ (\frac{4}{3})^3,\ (\frac{5}{4})^4$$

dür. On beşinci terim ise $a_{15} = (\frac{16}{15})^{15}$ dir.

Fonksiyonlar bahsini incelerken her fonksiyonu açık olarak ifade edemeyeceğimizi söylemiştik. Onun için kapalı fonksiyon kavramını tanımlamıştık. Dizilerde de her dizinin genel terimini bulma imkanımızın olmadığı durumlarla karşılaşırız. Bu durumda diziyi elde edebilmek için dizinin birinci terimi ve bu terim yardımıyla dizinin diğer elemanlarını bulabileceğimiz bir kural verilir. Buna dizilerin ardışık olarak tanımlanması adı verilir. Bunun için aşağıdaki örneği inceleyelim:

6.1.5. Örnek: Verilen şartı sağlayan (a_n) dizisinin ilk dört terimini bulunuz.

i. $a_1 = 3$ ve $n \geq 1$ için $a_{n+1} = 2a_n$ *ii.* $a_1 = 1$ ve $n \geq 2$ için $a_n = 1 + \sqrt{a_{n-1}}$

Çözüm: *i.* (a_n) dizisinde $n = 1$ için $a_1 = 3$ olarak veriliyor. $n = 1$ için ise verilen kural $a_2 = 2a_1$ olur. Buradan $a_1 = 3$ olduğundan $a_2 = 6$ bulunur. Bu muhakemeye devam ederek

$$n = 2 \text{ için } a_3 = 2a_2 \Rightarrow a_3 = 12$$
$$n = 3 \text{ için } a_4 = 2a_3 \Rightarrow a_4 = 24$$
$$\vdots$$

yazılır. Böylece dizinin bütün terimlerini bulabiliriz.

ii. Yukarıdakine benzer muhakeme ile

$$n = 1 \text{ için } a_1 = 1$$
$$n = 2 \text{ için } a_2 = 1 + \sqrt{a_1} \Rightarrow a_2 = 2$$
$$n = 3 \text{ için } a_3 = 1 + \sqrt{a_2} \Rightarrow a_3 = 1 + \sqrt{2}$$
$$n = 4 \text{ için } a_4 = 1 + \sqrt{a_3} \Rightarrow a_4 = 1 + \sqrt{1 + \sqrt{2}}$$
$$\vdots$$

bulunur.

Fonksiyonlar için verilen bazı tanımları diziler için yeniden ifade edelim.

6.1.6. Tanım: (a_n) dizisini gözönüne alalım.

i. Her n için $k \leq a_n \leq K$ olacak şekilde K ve k sayılar varsa (a_n) dizisine sınırlı dizi denir. Sınırlı olmayan diziye ise sınırsız dizi adı verilir. Eğer her n için $a_n \leq K$ olacak şekilde K sayısı varsa (a_n) dizisine üsten sınırlı, $k \leq a_n$ olacak şekilde k sayısı varsa (a_n) dizisine alttan sınırlı dizi denir.

ii. Her n için $a_n < a_{n+1}$ ise (a_n) dizisine artan dizi, $a_{n+1} < a_n$ ise (a_n) dizisine azalan dizi denir.

Bu tanıma göre sınırlı bir dizi hem üsten hem de alttan sınırlıdır. Ayrıca $M > 0$ olmak üzere $K = M$ ve $k = -M$ olarak alınırsa sınırlılığın tanımındaki $k \leq a_n \leq K$ şeklindeki eşitsizlik $|a_n| \leq M$ şekline dönüşür. Dolayısıyla bir dizinin sınırlı olmasını göstermek için bu eşitsizliklerden herhangi birisinin doğruluğunun gösterilmesi yeterlidir. Diğer yandan her n için $\dfrac{a_n}{a_{n+1}} < 1$ ise dizi artan ve $\dfrac{a_n}{a_{n+1}} > 1$ ise dizi azalandır.

6.1.7. Örnek: *i.* Genel terimi $(-1)^n$ olan (a_n) dizisini gözönüne alalım. Her n için $-1 \leq a_n$ (veya $-5 < a_n$, $-\sqrt{2} < a_n$...vs) olduğundan bu dizi alttan sınırlı, $a_n \leq 1$ (veya $a_n < 4$, $a_n \leq 1000$... vs) olduğundan üsten sınırlı bir dizidir. Aynı zamanda bu sınırlı bir dizidir. Diğer yandan bu dizi ne artan ne de azalandır.

ii. Genel terimi $a_n = \frac{1}{n}$ olan diziyi gözönüne alalım. Her n için $0 < a_n \leq 1$ olduğu görülür. Dolayısıyla bu, sınırlı bir dizidir. Diğer yandan her n için

$$a_{n+1} = \frac{1}{n+1} < \frac{1}{n} = a_n$$

olduğundan (a_n) dizisi azalan bir dizidir. Bu dizinin hem azalan hem de alttan sınırlı olduğuna dikkat ediniz.

iii. Ardışık olarak tanımlanan

$$a_1 = \sqrt{2} \text{ ve } n \geq 2 \text{ için } a_n = \sqrt{2 + a_{n-1}}$$

(a_n) dizisini gözönüne alalım. Bu dizinin artan olduğunu göstermek için tümevarım metodunu kullanacağız. Bunun için

$$c_k = a_{k+1} - a_k = \sqrt{2 + a_k} - a_k$$

dersek $c_k > 0$ olduğunu göstereceğiz.

i. $k = 1$ için

$$c_1 = a_2 - a_1 = \sqrt{2 + \sqrt{2}} - \sqrt{2} > 0$$

olur.

ii. Bu eşitsizliğin $k = n - 1$ için doğru olduğunu kabul edelim. Yani

$$c_{n-1} = a_n - a_{n-1} > 0$$

olsun.

iii. Şimdide $k = n$ için doğru olduğunu gösterelim:

$$\begin{aligned} c_n = a_{n+1} - a_n &= \sqrt{2 + a_n} - a_n \\ &= \frac{\sqrt{2 + a_n} - a_n}{\sqrt{2 + a_n} + a_n}(\sqrt{2 + a_n} + a_n) \\ &= \frac{2 + a_n - a_n^2}{\sqrt{2 + a_n} + a_n} \\ &= \frac{2 + a_n - (2 + a_{n-1})}{\sqrt{2 + a_n} + a_n} \end{aligned}$$

$$= \frac{a_n - a_{n-1}}{\sqrt{2+a_n} + a_n} > 0$$

yazılır. Yani, $a_n < a_{n+1}$ olur. Dolayısıyla bu dizi artan bir dizidir. Şimdi de bu dizinin sınırlı olduğunu gösterelim. Dizinin verilişinden alt sınırın $\sqrt{2}$ olduğu açıktır. Üst sınır ise

$$\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots}}} = x$$

eşitliğinden yararlanılarak bulunur. Buna göre

$$2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots}}} = x^2$$

ve buradan da

$$2 + x = x^2$$

denklemi elde edilir. Böylece $x = 2$ ve $x = -1$ bulunur. $x = -1$ olamayacağından $x = 2$ alınır. O halde, her n için, $\sqrt{2} \leq a_n < 2$ olduğundan dizi sınırlıdır. Bu dizinin hem artan hem de yukarıdan sınırlı olduğuna dikkat ediniz.

iv. Genel terimi $a_n = (-1)^n n^2$ olan diziyi gözönüne alalım. Bu dizi ne alttan ne de üsten sınırlıdır. Artan veya azalan bir dizi de değildir.

Alıştırmalar

1. Aşağıda genel terimi verilen dizilerin ilk dört terimini ve 20.terimini bulunuz.
i. $a_n = n^2 - 2$ **ii.** $a_n = (\frac{1}{2})^n$ **iii.** $a_n = (-1)^n n^2$

2. r bir sabit sayı ve a_1 dizinin ilk terimi olmak üzere $a_n = a_1 + (n-1)r$ dizisine aritmetik dizi denir. Buna göre aşağıdaki aritmetik dizilerin genel terimini bulunuz.
i. $a_1 = 1,\ a_n = a_1 + (n-1)$ **ii.** $a_1 = \frac{1}{2},\ a_n = a_1 + (n-1)\frac{1}{2}$

3. Bir aritmetik dizide a_n, n.terim; a_p, p.terim ve $p < n$ olmak üzere r ortak farkının

$$r = \frac{a_n - a_p}{n - p}$$

olduğunu gösteriniz.

4. $a_1 = 1$, $a_2 = 1$ ve $a_{n+2} = a_n + a_{n+1}$ ile tanımlanan diziye Fibnacci dizisi denir. Bu dizinin ilk 15 terimini yazınız. Bu dizinin sınırlılığı hakkında ne söylersiniz?

6.2. Dizilerde Limit

Daha önce fonksiyonlarda limit kavramını inceledik. Bu incelemeyi yaparken $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ limitinden sözedebilmemiz için a nın $f(x)$ fonksiyonunun tanım kümesinin yığılma noktası olması gerektiğini vurgulamıştık. Dizilerin limitinden sözedebilmek için yine aynı kurallar geçerlidir. Ancak $\mathbb{N}$ pozitif tam sayılar kümesindeki hiç bir eleman bu kümenin yığılma noktası değildir. Dolayısıyla $f(n) = a_n$ kuralı ile verilen bir dizi için $a \in \mathbb{N}$ olmak üzere $\lim\limits_{n \to a} f(n)$ limitinden sözedemeyiz. Çünkü $a \in \mathbb{N}$, pozitif tam sayıların bir yığılma noktası değildir. O halde sadece $n \to +\infty$ için dizilerin limitinden sözedilebilir. Bu durumda limit tanımı fonksiyonlarda verilen limit tanımından farklı olmaz.

6.2.1. Tanım: (a_n) dizisini gözönüne alalım. Her $\varepsilon > 0$ için $n > n_o$ olduğunda $|a_n - a| < \varepsilon$ olacak şekilde bir (ε a bağlı) n_o tam sayısı varsa $n \to +\infty$ için (a_n) dizisinin limiti a dır denir ve $\lim\limits_{n \to +\infty} a_n = a$ yazılır.

Eğer bu tanımda a_n yerine $f(n)$ yazarsak, fonksiyonlar için bilinen limit tanımını elde ederiz. Bilindiği gibi $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ limiti olabilir veya olmayabilir. Dizilerde bu limitin mevcut olup olmaması oldukça önemlidir. Dolayısıyla bu limitin mevcudiyeti dizileri iki önemli sınıfa ayırmamıza yardım eder.

6.2.2. Tanım: (a_n) dizisini gözönüne alalım. Eğer $\lim\limits_{n \to +\infty} a_n = a$ ise (a_n) dizisi a sayısına yakınsıyor denir ve $a_n \to a$ şeklinde gösterilir. Bir sayıya yakınsayan diziye yakınsak dizi, aksi halde ıraksak dizi denir.

Bir dizinin yakınsaklık veya ıraksaklığı dizinin karakteri olarak adlandırılır. Eğer bir dizinin limiti varsa, yani yakınsak ise limitin tanımına göre her $\varepsilon > 0$ için $n > n_o$ olduğunda

$$|a_n - a| < \varepsilon \Rightarrow a - \varepsilon < a_n < a + \varepsilon$$

yazılır. Bir (a_n) dizisini açık olarak $(a_1, a_2, ..., a_{n_o}, a_{n_o+1}, a_{n_o+2}, ...)$ şeklinde yazarız. Eğer $a_n \to a$ ise tanıma göre indisi n_o dan daha büyük olan terimlerin hepsi $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ açık aralığında kalır. Bir başka deyişle, yakınsak bir dizinin belli bir sayıdan daha büyük indisli sonsuz sayıdaki terimi a sayısının ε-komşuluklarında kalır.

6.2.3. Teorem: Genel terimi $f(n) = a_n$ olan diziyi gözönüne alalım. Ayrıca farzedelimki her $x \geq 1$ için $f(x)$ tanımlı olsun. Buna göre

i. Eğer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = a$ ise $\lim\limits_{n \to +\infty} f(n) = a$ (diğer bir gösterimle $\lim\limits_{n \to +\infty} a_n = a$) olur.

ii. Eğer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \infty$ ise $\lim\limits_{n \to +\infty} f(n) = \infty$ (veya diğer bir gösterimle $\lim\limits_{n \to +\infty} a_n = \infty$) olur.

Yine bir dizinin limitini hesaplamada işimize yarayacak olan aşağıdaki teoremi de verelim.

6.2.4. Teorem: Eğer $\lim\limits_{n \to +\infty} |a_n| = 0$ ise $\lim\limits_{n \to +\infty} a_n = 0$ olur.

6.2.5. Örnek: Aşağıda genel terimi verilen dizilerin karakterini belirtiniz.

i. $a_n = \dfrac{1}{n}$ *ii.* $a_n = 1 + \dfrac{\cos^2 n}{3^n}$ *iii.* $a_n = n$

iv. $a_n = (-1)^n$ *v.* $a_n = \dfrac{2n-1}{e^n}$ *vi.* $a_n = \dfrac{2^n}{n!}$

Çözüm: Bilindiği gibi dizinin karakterini belirlemenin yolu $n \to +\infty$ için limit alınmasıdır. Limitin sonucunun belirli bir sayı olması durumunda dizinin yakınsak aksi takdirde ıraksak olduğu söylenir.

i. $\lim\limits_{n \to +\infty} a_n = \lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{n} = 0$ olduğundan $a_n \to 0$, yani dizi yakınsak bir dizidir.

ii.

$$\lim_{n \to +\infty} a_n = \lim_{n \to +\infty} (1 + \frac{\cos^2 n}{3^n}) = 1$$

olduğundan $a_n \to 1$, yani, dizi yakınsaktır.

iii.

$$\lim_{n \to +\infty} a_n = \lim_{n \to +\infty} n = +\infty$$

olduğundan dizi ıraksaktır.

iv.

$$\lim_{n \to +\infty} (-1)^n = 1 \text{ veya } \lim_{n \to +\infty} (-1)^n = -1$$

olur. Belirli bir limit olmadığından bu dizi yakınsak olamaz. Yani ıraksaktır.

v.

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{2n-1}{e^n} = 0$$

olduğu sezgisel olarak söylenir. Dolayısıyla dizi yakınsaktır. Bu limitin böyle olduğunu görmek için $f(x) = \dfrac{2x-1}{e^x}$ fonksiyonunu gözönüne alalım. L'Hospital kuralını uygulayarak

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{2x-1}{e^x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{2}{e^x} = 0$$

elde edilir. Dolayısıyla

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{2n-1}{e^n} = 0$$

yazılır.

vi. Bu dizinin limitini bulmak için pay ve paydanın karşılıklı terimlerini karşılaştırmamız gerekir. $n \geq 4$ için $n! > 2^n$ olduğu görülür. Yani $n \to +\infty$ için paydadaki ifade daha çabuk büyür. Dolayısıyla

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{2^n}{n!} = 0$$

yazılır. Yani dizi yakınsaktır. Hatta, daha genel olarak, herhangi bir sabit k sayısı için

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{k^n}{n!} = 0$$

yazılır.

Dizilerin yakınsaklığına karar vermek için yararlanacağımız bir teorem de aşağıda verilmiştir.

6.2.6. Teorem: i. Üsten sınırlı artan bir dizi yakınsaktır.

ii. Alttan sınırlı azalan bir dizi yakınsaktır.

6.1.7.Örnekteki *ii* ve *iii* şıklar incelenirse verilen dizilerin yakınsak olduğu, bu teorem kullanılarak, görülür.

Şimdi de limitin tanımını kullanarak verilen bir sayının dizinin limiti olduğunu gösterelim.

6.2.7. Örnek: Limitin tanımını kullanarak aşağıdaki limitlerin doğru olduğunu gösteriniz.

i. $\lim_{n\to+\infty}(2 - \frac{1}{n^2}) = 2$ *ii.* $\lim_{n\to+\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} = 0$

Çözüm: *i.* $\varepsilon > 0$ sayısının verildiğini kabul edelim. $n > n_0$ olarak alınırsa

$$|a_n - 2| = |(2 - \frac{1}{n^2}) - 2| = \frac{1}{n^2} < \frac{1}{n_o^2}$$

olur.$|a_n - 2| < \varepsilon$ olması istendiğinden $\varepsilon = \frac{1}{n_o^2}$ diyebiliriz. Buradan da $n_o = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}$ olarak bulunur. Her $\varepsilon > 0$ için n_o sayısını bulabiliriz. Böylece

$$\lim_{n\to+\infty}\left(2-\frac{1}{n^2}\right)=2$$

olduğu görülür.

Burada eğer $\varepsilon = 0.0004$ verilirse $n_o = 50$ olarak buluruz. Buradan şunu da söyleyebiliriz: Verilen dizinin terimlerini gözönüne alırsak 2 nin 0.0004-komşuluğunun dışında kalan terimlerinin sayısı 50 tanedir.

ii. $\varepsilon > 0$ verilsin. $n > n_0$ olarak alınırsa

$$|a_n - 0| = |a_n| = |\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}| = \frac{1}{\sqrt{n}} < \frac{1}{\sqrt{n_o}}$$

yazılır. $|a_n| < \varepsilon$ olması istendiğine göre $\varepsilon = \dfrac{1}{\sqrt{n_o}}$ alınır. Buna göre $n_o = \dfrac{1}{\varepsilon^2}$ olarak bulunur.

Burada eğer $\varepsilon = 0.0004$ verilirse $n_o = 6\,250\,000$ olarak buluruz. Buradan şunu da söyleyebiliriz: Verilen dizinin terimlerini gözönüne alırsak 0 ın 0.0004-komşuluğunun dışında kalan terimlerinin sayısı 6 250 000 tanedir.

Bu iki örneği gözönüne aldığımızda ε nun aynı değeri için birinci ve ikinci örnekte bulunan n_o sayısının farklı değerde olduğu karşımıza çıkmaktadır. Buna bakarak birinci örnekteki yakınsamanın ikinci örnekteki yakınsamadan daha hızlı olduğu görülür. Yani, dizinin yakınsadığı noktanın belli komşulukları dışında bulunan terimlerin sayısı ile yeni bir kavram tanımlamış oluyoruz. Bu komşuluklar dışında ne kadar az terim bulunursa yakınsamanın daha hızlı olduğu söylenir.

Alıştırmalar

1. Genel terimi $a_n = \frac{2n+3}{n}$ olan bir dizinin limitini bulunuz. Bu dizinin karakteri hakkında ne söylersiniz? Ayrıca (a_n) dizisinin kaç terimi 2 nin $\frac{1}{40}$ komşuluğunun dışında bulunur?

2. Aşağıda genel terimleri verilen dizilerin karakterini belirtiniz.

i. $a_n = n^2 - 1$ **ii.** $a_n = \frac{n^2-1}{n^2+1}$ **iii.** $a_n = \frac{1}{n^n}$

iv. $a_n = \frac{\sin n}{n}$ **v.** $a_n = (-1)^n + 2$ **vi.** $a_n = \frac{(-1)^n}{n}$
vii. $a_n = \frac{2^n}{3^n}$ **viii.** $a_n = \frac{3^n}{2^n}$ **ix.** $a_n = \frac{\ln n}{n}$

6.3. Seriler

Bize 1, 2, 3, 4 sayıları verildiğinde $1+2+3+4$ işleminin bir anlamı olduğu bilinmekte ve $1+2+3+4=10$ yazılır. Verilen sayılar sonlu sayıda ise yine bu işlemin bir anlamı olduğunu ve işlemin yapıldığını görürüz. Eğer terim sayısı sonsuz olursa yukarıda yaptığımız toplama işlemi geçerliliğini kaybeder ve bu sonsuz terimin toplamı ile neyin kastedildiği açıklanmalıdır. İşte bu başlıkta $a_1, a_2, \ldots$ sayılar olmak üzere $a_1 + a_2 + \cdots$ sonsuz toplamının ne anlama geldiğini inceleyeceğiz. Bunu yaparken dizilerden istifade edeceğiz.

6.3.1. Tanım:

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots$$

ifadesine seri denir. $a_1, a_2, \ldots$ sayılarına da serinin terimleri adı verilir.

Bu seriyi göstermek için

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

veya

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots = \sum a_n$$

kullanılır. Burada şu noktayı vurgulamamız gerekir: $\sum$ sembolünde kullandığımız indislerin 1 den başlaması gerekmez. Hatta bazı durumlarda bu indisi sıfırdan da başlatabiliriz. Eğer indis yazılmamışsa sıfır da dahil olmak üzere a_n nin anlamlı olduğu en küçük indisten başlanır. Örneğin

$$\sum \frac{1}{\ln n}$$

denirse $a_n = \frac{1}{\ln n}$, $n = 0$ ve $n = 1$ için tanımlı olmadığından

$$\sum \frac{1}{\ln n} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln n}$$

alınır. Diğer yandan

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^2+1} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \cdots \text{ ve } \sum_{n=5}^{\infty} n = 5 + 6 + \cdots$$

şeklindeki seriler ile de karşılaşırız.

Şimdi de seri dediğimiz ve sembolik olarak toplam gibi görülen bu ifadenin ne anlama geldiğini inceleyelim. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ serisini gözönüne alalım. Bu serinin terimlerinden

$$\begin{aligned} s_1 &= a_1 \\ s_2 &= a_1 + a_2 \\ s_3 &= a_1 + a_2 + a_3 \\ &\vdots \\ s_n &= a_1 + a_2 + \cdots + a_n \\ &\vdots \end{aligned}$$

yazılarak (s_n) dizisini elde ederiz. s_n genel terimi kısa olarak $s_n = \sum_{i=1}^{n} a_i$ şeklinde yazılır. İşte bu (s_n) dizisine, verilen serinin kısmi toplamlar dizisi denir. Bu diziden faydalanarak verilen serinin ne anlama geldiğini izah edeceğiz.

6.3.2. Tanım: $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ serisi ve bu serinin (s_n) kısmi toplamlar dizisi verilsin. Eğer (s_n) kısmi toplamlar dizisi bir s sayısına yakınsıyorsa $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ serisi de s sayısına yakınsıyor denir ve

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = s$$

olarak yazılır. Bu s sayısına serinin toplamı denir. Bir sayıya yakınsayan seriye yakınsak seri, aksi halde ıraksak seri adı verilir.

Bu tanıma göre $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = s$ olması demek sonsuz tane sayının toplanması ile s sayısı elde ediliyor demek değildir. Bunun anlamı yukarıdaki tanımda açıklanmıştır. Bundan sonra karşılaştığımız zaman bu anlamı daima hatırlayacağız. Yine bu tanıma göre ıraksak seri bir toplama sahip değildir. Bir serinin yakınsak veya ıraksak olmasına serinin karakteri denir.

6.3.3. Örnek: Aşağıdaki serilerin karakterini belirleyiniz ve toplamını bulunuz.

i. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ *ii.* $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n$ *iii.* $\sum_{n=1}^{\infty} 1 = 1 + 1 + \cdots$

Çözüm: *i.* İlk önce

$$\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$$

dir. Bundan yararlanarak verilen serinin kısmi toplamlar dizisinin teşkil edebiliriz:

$$\begin{aligned}
s_1 &= 1 - \frac{1}{2} \\
s_2 &= (1 - \frac{1}{2}) + (\frac{1}{2} - \frac{1}{3}) = 1 - \frac{1}{3} \\
&\vdots \\
s_n &= (1 - \frac{1}{2}) + (\frac{1}{2} - \frac{1}{3}) + \cdots + (\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}) = 1 - \frac{1}{n+1} \\
&\vdots
\end{aligned}$$

olur. O halde kısmi toplamlar dizisinin genel terimi $s_n = 1 - \frac{1}{n+1}$ dir. Buna göre

$$\lim_{n\to+\infty} s_n = \lim_{n\to+\infty} (1 - \frac{1}{n+1}) = 1$$

olduğundan kısmi toplamlar dizisi 1 sayısına yakınsar. Dolayısıyla verilen seri de yakınsak olup toplamı, kısmi toplamlar dizisinin yakınsadığı, 1 olur. Yani,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1$$

dir.

ii. Bu serinin kısmi toplamlar dizisi

$$(s_n) = (-1, 0, -1, 0, ...)$$

şeklinde olup $\lim_{n \to +\infty} s_n$ limiti yoktur. Çünkü $n \to +\infty$ için s_n, 0 veya -1 olmaktadır. Dolayısıyla kısmi toplamlar dizisi ıraksak olduğundan verilen seri de ıraksak olur.

iii. Verilen serinin kısmi toplamlar dizisinin genel terimi $s_n = n$ dir. $\lim_{n \to +\infty} s_n = +\infty$ olduğundan (s_n) kısmi toplamlar dizisi ve dolayısıyla verilen seri ıraksaktır.

6.3.4. Tanım: $a \neq 0$ olmak üzere

$$\sum_{n=0}^{+\infty} ar^n = a + ar + ar^2 + \cdots + ar^n + \cdots$$

serisine, r ortak çarpanlı, geometrik seri denir.

Bir geometrik serinin yakınsaklık ve ıraksaklığı ile ilgili şartlar ve eğer yakınsak ise toplamının ne olduğu aşağıdaki teoremde verilmiştir.

6.3.5. Teorem: $\sum_{n=0}^{+\infty} ar^n$ geometrik serisi verilmiş olsun.

i. Eğer $|r| \geq 1$ ise geometrik seri ıraksaktır.

ii. Eğer $0 < |r| < 1$ ise geometrik seri yakınsaktır ve $\dfrac{a}{1-r}$ sayısına yakınsar.

İspat: Verilen geometrik serinin kısmi toplamlar dizisinin genel terimi $s_n = a + ar + \cdots + ar^n$ dir. Şimdi bu genel terim ile $rs_n = ar + ar^2 + \cdots + ar^{n+1}$ ifadesini taraf tarafa çıkarırsak $r \neq 1$ olmak üzere

$$(1-r)s_n = a(1-r^{n+1}) \text{ veya } s_n = a\frac{1-r^{n+1}}{1-r}$$

bulunur.

i. $|r| > 1$ ise $n \to +\infty$ için r^{n+1} sınırsız ve (s_n) dizisi de ıraksak olur. $r = -1$ ise $s_n = a\dfrac{1-(-1)^{n+1}}{2}$ olur. n tek ise $s_n = 0$; n çift ise $s_n = a$ olacağından seri yine ıraksak olur. $r = 1$ ise s_n tanımsız olur. Verilen geometrik seride $r = 1$ alınırsa elde edilen serinin kısmi toplamlar dizisinin genel terimi $s_n = (n+1)a$ ve $n \to +\infty$ için $s_n \to \infty$ olur. Dolayısıyla bu durumda da seri ıraksak olur. Bu üç durumu $|r| \geq 1$ olarak gösteririz ve bu durumda seri ıraksaktır deriz.

ii. $|r| < 1$ ise $n \to +\infty$ için $r^{n+1} \to 0$ ve dolayısıyla $s_n \to \dfrac{a}{1-r}$ olur. Böylece verilen seri yakınsak ve

$$\sum_{n=0}^{+\infty} ar^n = \frac{a}{1-r}$$

bulunur.

6.3.6.Örnek: Aşağıdaki serilerin yakınsak olup olmadığını araştırınız. Eğer yakınsak ise toplamını bulunuz.

i. $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left(\dfrac{1}{3}\right)^n$ *ii.* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 3^n$

Çözüm: *i.* Verilen seri bir geometrik seridir. $r = \frac{1}{3} < 1$ olduğundan seri yakınsaktır.

$$s_n = \frac{1-(\frac{1}{3})^{n+1}}{1-\frac{1}{3}}$$

ve

$$\lim_{n\to+\infty} s_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{1-(\frac{1}{3})^{n+1}}{1-\frac{1}{3}} = \frac{3}{2}$$

bulunur. Dolayısıyla verilen seri yakınsak ve

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^n = \frac{3}{2}$$

dir.

ii. Verilen seri bir geometrik seri ve $r = 3 > 1$ olduğundan ıraksaktır.

6.4. Serilerin Yakınsaklık Kuralları

Bir serinin toplamından sözedilebilmesi için o serinin yakınsak olması gerekir. Her serinin karakterini belirlemek ve yakınsak ise toplamını bulmak kolay bir iş değildir. Yakınsaklığı belirleyebilmek için bazı kurallar vardır. Bir serinin yakınsak olduğu gösterildiğinde, aslında, toplamının varlığı gösterilmiş olur, ancak toplamının ne olduğu sorusu, çok özel durumlar hariç, cevapsız bırakılır.

6.4.1. Teorem: i. Eğer $\sum a_n$ serisi yakınsak ise $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0$ dır.
ii. Eğer $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n \neq 0$ ise $\sum a_n$ serisi ıraksaktır.

İspat: i. $\sum a_n$ serisi yakınsak olduğundan (s_n) bu serinin kısmi toplamlar dizisi olmak üzere $\lim\limits_{n\to+\infty} s_n = s$ dir. $s_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ ve $s_{n-1} = a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1}$ olduğundan $s_n - s_{n-1} = a_n$ yazılır. $\lim\limits_{n\to+\infty} s_n = \lim\limits_{n\to+\infty} s_{n-1}$ ve dolayısıyla $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0$ bulunur.

ii. i nin ispatına benzer olarak yapılır.

Bu teoremden sonra şu yanlış anlama olmaktadır: $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0$ ise seri yakınsak olur. Tekrar hatırlatalım ki bu doğru değildir. Eğer $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0$ ise serinin karakteri hakkında bir şey söylenemez, yani seri yakınsakta olabilir, ıraksakta olabilir.

6.4.2. Örnek: *i.* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{3n}{n+1}$ serisinin karakterini belirtiniz.

ii. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ serisinin yakınsak olduğu bilindiğine göre $\lim_{n \to +\infty} a_n$ limitini bulunuz.

Çözüm: *i.*

$$\lim_{n \to +\infty} a_n = \lim_{n \to +\infty} \frac{3n}{n+1} = 3$$

olduğundan verilen seri ıraksaktır.

ii. Seri yakınsak olduğundan $\lim_{n \to +\infty} a_n = 0$ olur.

Pozitif Terimli Seriler: Bir seri verildiği zaman terimlerinin pozitif (veya negatif) olmasına göre seriye pozitif (veya negatif) terimli seri adı verilir. Bir de terimleri hem pozitif hem de negatif olan seriler vardır. Bu tip serilerin özel bir çeşiti daha sonra incelenecektir. Şimdi pozitif terimli seriler için yakınsaklık kurallarını inceleyeceğiz.

6.4.3. Teorem *(İntegral Kuralı)*: f, $[1, +\infty)$ aralığında azalan ve bu aralıkta pozitif değerler alan bir sürekli fonksiyon olsun. Ayrıca $n = 1, 2, ...$ için $f(n) = a_n$ olduğunu farzedelim.

i. Eğer $\int_1^{+\infty} f(x)dx$ yakınsak ise $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ seriside yakınsaktır.

ii. Eğer $\int_1^{+\infty} f(x)dx$ ıraksak ise $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ seriside ıraksaktır.

İspat: 6.4.1. Şekli gözönüne alalım. Buradaki birinci ve ikinci şekildeki dikdörtgenlerin alanlarının ayrı ayrı toplamı sırasıyla

$$\sum_{i=1}^{n-1} f(i) = \sum_{i=1}^{n-1} a_i \quad \text{ve} \quad \sum_{i=2}^{n} f(i) = \sum_{i=2}^{n} a_i$$

olarak yazılır. Gerçekte $y = f(x)$ eğrisi, x-ekseni, $x = 1$ ve $x = n$ doğruları ile sınırlanan şeklin alanı

$$\int_1^n f(x)dx$$

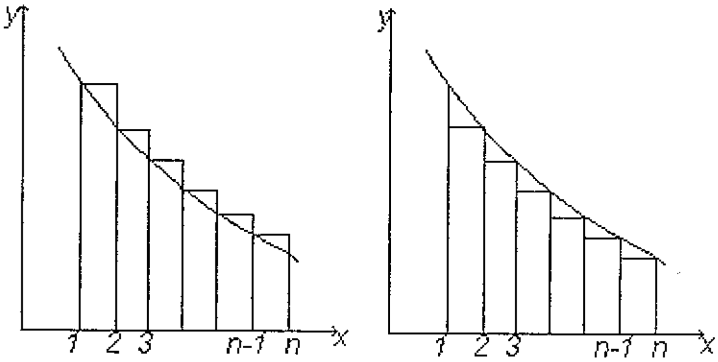
olur. O halde

$$\sum_{i=2}^{n} a_i \leq \int_1^n f(x)dx \leq \sum_{i=1}^{n-1} a_i$$

veya kısmi toplamlar dizisinin genel terimi cinsinden

$$s_n - a_1 \leq \int_1^n f(x)dx \leq s_n - a_n \qquad (*)$$

yazılır.



6.4.1. Şekil

i. f, $[1, +\infty)$ aralığında pozitif olduğundan $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ serisinin (s_n) kısmi toplamlar dizisi artan bir dizidir. Şimdi bu (s_n) artan dizisinin üsten sınırlı olduğunu göstereceğiz. $\int_1^{+\infty} f(x)dx$ integralinin bir I değerine yakınsadığı kabul edilirse, $(*)$ eşitsizliğinin $s_n - a_1 \leq \int_1^n f(x)dx$ kısmından dolayı,

$$s_n \leq \int_1^n f(x)dx + a_1 = I + a_1$$

olur. Yani (s_n) kısmi toplamlar dizisi üsten sınırlıdır. 6.2.6. Teoreme göre (s_n) kısmi toplamlar dizisi yakınsak ve dolayısıyla verilen seri yakınsak olur.

ii. (6.1) eşitsizliğinden

$$\int_1^n f(x)dx \leq s_n$$

yazılır. $\int_1^{+\infty} f(x)dx$ integrali ıraksak olduğundan $\lim\limits_{n\to+\infty} s_n = +\infty$ olur. Yani, (s_n) kısmi toplamlar dizisi ve dolayısıyla verilen seri ıraksak olur.

6.4.4. Örnek: Aşağıdaki serilerin karakterini belirlemek için integral kuralının uygulanıp uygulanamayacağını gösteriniz ve bu serilerin karakterini bulunuz.

i. $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$ *ii.* $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{e^{n^2}}$ *iii.* $\sum\limits_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n \ln n}$ *iv.* $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} n^2$

Çözüm: *i.* $a_n = f(n) = \frac{1}{n}$ olduğundan $f(x) = \frac{1}{x}$ dir. f sürekli, $x \geq 1$ için azalan ve pozitif değer alan bir fonksiyondur. Dolayısıyla verilen serinin karakterini belirleyebilmek için integral kuralını kullanabiliriz.

$$\begin{aligned}\int_1^{+\infty} \frac{1}{x} dx &= \lim_{b\to+\infty} \int_1^b \frac{1}{x} dx \\ &= \lim_{b\to+\infty} \left(\ln x \Big|_1^b \right) \\ &= +\infty\end{aligned}$$

olduğundan integral ıraksaktır. Dolayısıyla verilen seri ıraksak olur.

Bu

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} + \cdots$$

serisine *harmonik seri* adı verilir. Görüldüğü gibi harmonik seri ıraksaktır.

ii. $f(x) = xe^{-x^2}$ dir. Bu fonksiyon $x \geq 1$ için pozitif değerli ve süreklidir. Diğer yandan $x \geq 1$ için

$$f'(x) = e^{-x^2}(1 - 2x^2) < 0$$

olduğundan $[1, +\infty)$ aralığında azalandır. Böylece integral kuralını uygulayabiliriz.

$$\int_1^{+\infty} xe^{-x^2} dx = \frac{1}{2e}$$

olur. O halde integral yakınsak olduğundan verilen seri de yakınsaktır.

iii. $f(x) = \frac{1}{x\ln x}$ dır. Bu fonksiyon $x \geq 2$ için pozitif değerli ve süreklidir. Ayrıca $x \geq 2$ için

$$f'(x) = -\frac{\ln x + 1}{(x\ln x)^2} < 0$$

olduğundan $[2, +\infty)$ aralığında azalandır. Öte yandan

$$\int_2^{+\infty} \frac{1}{x\ln x}dx = \lim_{x\to+\infty}\int_2^b \frac{1}{x\ln x}dx = +\infty$$

olduğundan integral ıraksak dolayısıyla verilen seri ıraksak olur.

iv. $f(x) = x^2$ fonksiyonu $x \geq 1$ için sürekli pozitif değerli bir fonksiyondur. Ancak $[1, +\infty)$ aralığında fonksiyon artan olduğundan verilen serinin karakterini belirleyebilmek için integral kuralı uygulanamaz. Bu serinin karakterini belirleyebilmek için 6.4.1. Teorem uygulanabilir. Buna göre

$$\lim_{n\to+\infty} n^2 = +\infty$$

olduğundan seri ıraksaktır.

6.4.1 ve 6.4.3. Teoremlerin bir sonucu olarak aşağıdaki teoremi verebiliriz:

6.4.5. Teorem *(p-serisi Kuralı)*:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^p}$$

serisini gözönüne alalım. Eğer $p > 1$ ise seri yakınsak, $p \leq 1$ ise seri ıraksaktır.

İspat: $p > 1$ ve $0 \leq p \leq 1$ için integral kuralı uygulanır. $p < 0$ için ise 6.4.1. Teorem kullanılır.

6.4.6. Örnek: *i.* $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ serisini gözönüne alalım. Burada $p = 2 > 1$ olduğundan seri yakınsaktır.

ii. $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ serisini gözönüne alalım. Burada $p = \frac{1}{2} < 1$ olduğundan seri ıraksaktır.

Şimdi de karakterini bildiğimiz bir seri yardımı ile, verilen bir serinin karakterinin belirlenebilmesi için bir kural vereceğiz.

6.4.7. Teorem *(Karşılaştırma Kuralı)*: $\sum a_n$ ve $\sum b_n$ pozitif terimli iki seri olsun.

i. Eğer $\sum b_n$ serisi yakınsak ve her n için $a_n \leq b_n$ ise $\sum a_n$ serisi de yakınsaktır.

ii. Eğer $\sum b_n$ serisi ıraksak ve her n için $b_n \leq a_n$ ise $\sum a_n$ serisi de ıraksaktır.

6.4.8. Örnek: Aşağıdaki serilerin karakterlerini belirtiniz.

i. $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{3+3^n}$ *ii.* $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin n}{n^2}$ *iii.* $\sum\limits_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{n-1}}$

Çözüm: *i.* Serinin n.terimini alalım.

$$\frac{1}{3+3^n} < \frac{1}{3^n}$$

yazılır. $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{3^n}$ yakınsak olduğundan verilen seri de yakınsaktır.

ii. Birinciye benzer olarak

$$\frac{\sin n}{n^2} \leq \frac{1}{n^2}$$

yazılır. $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ bir p-serisi olup $p = 2 > 1$ olduğundan yakınsaktır. Dolayısıyla $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin n}{n^2}$ serisi yakınsak olur.

iii. $n \geq 2$ için

$$\frac{1}{\sqrt{n-1}} > \frac{1}{\sqrt{n}}$$

olur. $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}$ bir p-serisidir ve $p=\frac{1}{2}<1$ olduğundan ıraksaktır. Dolayısıyla verilen seri de ıraksak olur.

6.4.9. Teorm *(Limit Karşılaştırma Kuralı)*: $\sum a_n$ ve $\sum b_n$ pozitif terimli iki seri ve

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{a_n}{b_n}=L$$

olsun. Eğer

i. $0<L<+\infty$ ise her iki seri ya yakınsak veya ıraksaktır.
ii. $L=0$ ve $\sum b_n$ yakınsak ise $\sum a_n$ seriside yakınsaktır.
iii. $L=+\infty$ ve $\sum b_n$ ıraksak ise $\sum a_n$ seriside ırasaktır.

6.4.10. Örnek: Aşağıdaki serilerin karakterini belirtiniz.

i. $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{\sin\frac{\pi}{n}}{n}$ *ii.* $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{\cos\frac{\pi}{n}}{n}$ *iii.* $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{n2^n+5}{4n^3+3n}$

Çözüm: *i.* $a_n=\dfrac{\sin\frac{\pi}{n}}{n}$ ve $b_n=\dfrac{1}{n^2}$ alalım. $\sum b_n$ serisi yakınsaktır. Şimdi limit karşılaştırma kuralını uygulayalım:

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{a_n}{b_n}=\lim_{n\to+\infty}\frac{\frac{\sin\frac{\pi}{n}}{n}}{\frac{1}{n^2}}=\lim_{n\to+\infty}\frac{\sin\frac{\pi}{n}}{\frac{1}{n}}=\pi$$

$\pi>0$ ve $\sum b_n$ yakınsak olduğundan $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{\sin\frac{\pi}{n}}{n}$ seriside yakınsaktır.

ii. $a_n=\dfrac{\cos\frac{\pi}{n}}{n}$ ve $b_n=\dfrac{1}{n}$ alalım. $\sum b_n$ serisi ıraksaktır. Diğer yandan

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{a_n}{b_n}=\lim_{n\to+\infty}\frac{\frac{\cos\frac{\pi}{n}}{n}}{\frac{1}{n}}=\lim_{n\to+\infty}\cos\frac{\pi}{n}=1$$

bulunur. $1>0$ ve $\sum b_n$ serisi ıraksak olduğundan verilen seri de ıraksaktır.

iii. $a_n=\dfrac{n2^n+5}{4n^3+3n}$ ve $b_n=\dfrac{2^n}{n^2}$ alalım. $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{2^n}{n^2}\neq 0$ olduğundan $\sum b_n$ serisi ıraksaktır. Diğer yandan

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{1}{4}$$

olur. $\frac{1}{4} > 0$ ve $\sum b_n$ serisi ıraksak olduğundan verilen seri ıraksak olur.

Karşılaştırma yapacağımız seriyi seçerken verilen serinin n.terimini de dikkate alıyoruz. Bu durumda pay ve paydada n nin en büyük kuvvetini ihtiva eden terimler hariç diğerlerini ihmal ediyoruz. Aşağıdaki örnekleri inceleyiniz:

Verilen seri	Karşılaştırma serisi	Sonuç
$\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{3n^2-4n+5}$	$\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$	Her iki seri yakınsak
$\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{3n-2}}$	$\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$	Her iki seri ıraksak
$\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{n^2-10}{5n^5+n^2}$	$\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{n^2}{n^5} = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^3}$	Her iki seri yakınsak
$\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{4\sqrt{n}}{\sqrt{n^3+1}}$	$\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n^3}} = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$	Her iki seri ıraksak

6.4.11. Teorem *(Bölüm Kuralı)*: $a_n > 0$ olmak üzere $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ serisini gözönüne alalım.

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = L$$

olsun. Eğer

i. $L < 1$ ise $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ serisi yakınsaktır.

ii. $L > 1$ ise $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ serisi ıraksaktır.

iii. $L = 1$ ise bu kural serinin karakteri hakkında bilgi vermez.

6.4.12. Örnek: Aşağıdaki serilerin karakterini belirtiniz.

i. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3^n}{n!}$ *ii.* $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^n}{n^3}$ *iii.* $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ *iv.* $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n!}{n^n}$

v. $\frac{1}{3} + \frac{1.3}{3.6} + \frac{1.3.5}{3.6.9} + \cdots + \frac{1.3.5.\cdots.(2n-1)}{3.6.9.\cdots 3n} + \cdots$

Çözüm: *i.* Verilen seride $a_n = \frac{3^n}{n!}$ dir. Buna göre $a_{n+1} = \frac{3^{n+1}}{(n+1)!}$ olur.

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{3^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{3^n}{n!}} = \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{3^{n+1}}{(n+1)!} \frac{n!}{3^n}\right) = 0$$

bulunur. Dolayısıyla $L = 0 < 1$ olduğundan verilen seri yakınsaktır.

ii. Verilen seride $a_n = \frac{2^n}{n^3}$ dir. $a_{n+1} = \frac{2^{n+1}}{(n+1)^3}$ olur.

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{2^{n+1}}{(n+1)^3}}{\frac{2^n}{n^3}} = \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{2^{n+1}}{(n+1)^3} \frac{n^3}{2^n}\right) = 2$$

bulunur. $L = 2 > 1$ olduğundan verilen seri ıraksaktır.

iii. Bu seri için de

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^2 = 1$$

olur. Dolayısıyla bölüm kuralı bu serinin karakteri hakkında bilgi vermez. Bu serinin yakınsak olduğu diğer kuralların uygulanması ile görülebilir.

iv. Verilen bu seri için

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \frac{1}{e}$$

olur. $L = \frac{1}{e} < 1$ olduğundan seri yakınsaktır.

v. İlk önce

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1.3.5.\cdots.(2n-1)(2n+1)}{3.6.9.\cdots.3n(3n+3)} \frac{3.6.9.\cdots.3n}{1.3.5.\cdots.(2n-1)} = \frac{2n+1}{3n+3}$$

dır. Buna göre

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{2}{3}$$

olur. $L=\frac{2}{3}<1$ olduğundan verilen seri yakınsaktır.

6.4.13. Teorem *(Kök Kuralı)*: a_n pozitif terimli bir seri ve

$$\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{a_n}=L$$

olsun. Buna göre,

i. $L<1$ ise seri yakınsaktır.
ii. $L>1$ ise seri ıraksaktır.
iii. $L=1$ ise bu kural serinin karakteri hakkında bilgi vermez.

6.4.14. Örnek: Aşağıdaki serilerin karakterini belirleyiniz.

i. $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{e^{2n}}{n^n}$ *ii.* $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n^3}{3^n}$ *iii.* $\sum_{n=0}^{+\infty}\arcsin 2^{-n}$

Çözüm: *i.* Verilen serinin n.terimi $a_n=\frac{e^{2n}}{n^n}$ dir. O halde

$$\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim_{n\to+\infty}\frac{e^2}{n}=0$$

bulunur. $L=0<1$ olduğundan verilen seri yakınsaktır.

ii. $a_n=\frac{n^3}{3^n}$ olduğundan

$$\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{\frac{n^3}{3^n}}=\lim_{n\to+\infty}\frac{n^{3/n}}{3}$$

yazılır. Bu son limiti $\lim_{x\to+\infty}\frac{x^{3/x}}{3}$ şeklinde yazıp daha önce gördüğümüz belirsiz hallerin limitlerinde kullandığımız tekniklerden istifade ederek hesaplarsak $\lim_{x\to+\infty}\frac{x^{3/x}}{3}=\frac{1}{3}$ ve dolayısıyla

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n^{3/n}}{3} = \frac{1}{3}$$

olarak buluruz. $L = \frac{1}{3} < 1$ olduğundan verilen seri yakınsaktır.

iii. $a_n = \arcsin 2^{-n}$ dir.

$$\sqrt[n]{a_n} = (\arcsin 2^{-n})^{\frac{1}{n}}$$

olur. $\lim_{x\to+\infty}(\arcsin 2^{-x})^{\frac{1}{x}}$ limiti hesapladığımız zaman $\lim_{x\to+\infty}(\arcsin 2^{-x})^{\frac{1}{x}} = \frac{1}{2}$ bulunur. Dolayısıyla

$$\lim_{n\to+\infty}(\arcsin 2^{-n})^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{2}$$

olur. O halde verilen seri yakınsaktır.

Alterne Seriler: Bu başlık altında ardışık terimleri değişik işaretli olan serilerle ilgileneceğiz. Bu serilere alterne seri adı verilir. Buna göre, alterne seriler $a_n > 0$ olmak üzere,

$$\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n a_n = -a_1 + a_2 - a_3 + \cdots + (-1)^n a_n + \cdots$$

veya

$$\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1} a_n = a_1 - a_2 + a_3 - \cdots + (-1)^{n+1} a_n + \cdots$$

şeklindedir. Örneğin

$$\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1}\left(\frac{1}{n}\right) = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \cdots + (-1)^{n+1}\frac{1}{n} + \cdots$$

serisi bir alterne seridir. Bu seriye harmonik alterne seri adı verilir. Diğer yandan

$$1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \cdots$$

bir alterne seri değildir. Çünkü, ardışık terimler olan 1 ve $\frac{1}{2}$, aynı şekilde $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{5}$ in işareti değişmediğinden bu seri alterne seri olamaz.

Alterne serilerin yakınsaklığı ile ilgili aşağıdaki teoremi verebiliriz.

6.4.15. Teorem: $a_n > 0$ olmak üzere $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n a_n$ veya $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1} a_n$ alterne serisi verilsin. Eğer

i. Her n için $a_{n+1} \leq a_n$,

ii. $\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$

oluyorsa verilen alterne seri yakınsak olur.

Bu teoremle her alterne serinin yakınsaklığı belirlenemez. Aşağıdaki örnekleri inceleyelim.

6.4.16. Örnek: Aşağıdaki alterne serilerin karakterini belirtiniz.

i. $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1}(\frac{1}{n})$ *ii.* $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1}(\frac{n+1}{2n})$ *iii.* $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1}(\frac{3n+2}{4n^2-3})$

Çözüm: *i.* $a_n = \frac{1}{n}$ dir. 6.4.15. Teoremi uygulamaya çalışalım:

1. Her n için

$$a_{n+1} = \frac{1}{n+1} < \frac{1}{n} = a_n,$$

2.

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$$

olduğundan verilen alterne seri yakınsaktır.

ii. Bu alterne seride $a_n = \frac{n+1}{2n} = \frac{1}{2}(1+\frac{1}{n})$ olarak yazılır. 6.4.15. Teoremi uygulamaya çalışalım:

1. Her n için

$$a_{n+1} = \frac{1}{2}(1+\frac{1}{n+1}) < \frac{1}{2}(1+\frac{1}{n}) = a_n,$$

2.

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n+1}{2n} = \frac{1}{2}$$

olur. 6.4.15. Teoreme göre bu serinin karakteri hakkında birşey söylenemez. Ancak 6.4.1. Teoreme göre

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = \frac{1}{2} \neq 0$$

olduğundan verilen seri ıraksaktır.

iii. $a_n = \frac{3n+2}{4n^2-3}$ olarak verilmiştir.

1. $a_{n+1} \leq a_n$ olduğunu göstermek için türevi kullanacağız. $f(x) = \frac{3x+2}{4x^2-3}$ olduğundan

$$f'(x) = \frac{-12x^2 - 16x - 9}{(4x^2-3)^2}$$

bulunur. $f'(x)$ fonksiyonu tanımlı olduğu kümedeki her x için negatif olduğundan $f(x)$ fonksiyonu bu kümede azalandır. Dolayısıyla her n için $a_{n+1} \leq a_n$ dir.

2.

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{3n+2}{4n^2-3} = 0$$

olur. Dolayısıyla verilen alterne seri yakınsaktır.

Mutlak ve Şartlı Yakınsaklık: Konunun daha iyi kavranabilmesi için bir örnekle başlayalım. $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1}\left(\frac{1}{n}\right)$ ve $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n}$ serilerini gözönüne alalım. Bu serilerden birincisinin yakınsak, ikincisinin ıraksak olduğunu gördük. Dikkat edilirse ikinci seri, birinci serinin terimlerinin mutlak değeri alınmış halidir. Diğer yandan $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1}\left(\frac{1}{n^2}\right)$ ve $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}$ serileri gözönüne alınırsa her ikisinin de yakınsak olduğu görülür. Burada da ikinci seri, birinci serinin terimlerinin mutlak değeri alınmış halidir. Demek ki $\sum a_n$ ile $\sum|a_n|$ serilerinin karakterleri aynı veya farklı olabiliyor.

6.4.17. Tanım: $\sum a_n$ serisi verilsin. $\sum|a_n|$ serisi yakınsak ise $\sum a_n$ serisine mutlak yakınsak seri; $\sum a_n$ yakınsak ancak $\sum|a_n|$ ıraksak ise $\sum a_n$ serisine şartlı yakınsak seri adı verilir.

$\sum|a_n|$ serisi pozitif terimli bir seridir. Dolayısıyla verilen $\sum a_n$ serisinin mutlak yakınsak olduğunu gösterirken pozitif terimli seriler için verilen kurallar aynen uygulanır. Bu uygulamayı yaparken serinin genel terimi olarak $|a_n|$ alınır.

6.4.18. Teorem: $\sum|a_n|$ serisi yakınsak ise $\sum a_n$ seriside yakınsaktır.

Bu teoremi şöylede ifade edebiliriz: Mutlak yakınsak seri yakınsak bir seridir. Bu ifade bize yakınsaklık ile mutlak yakınsaklık arasındaki ilişkiyi verir.

6.4.19. Örnek: Aşağıdaki serilerin mutlak veya şartlı yakınsak olup olmadığını araştırınız.

i. $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\left(-\frac{2}{5}\right)^n$ *ii.* $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}$ *iii.* $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{\alpha^n}{\sqrt{n}}$

Çözüm: *i.* $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\left|\left(-\frac{2}{5}\right)\right|^n=\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{2}{5}\right)^n$ olur. Bu seri de, ortak çarpanı $r=\frac{2}{5}<1$ olan, yakınsak geometrik bir seridir. Dolayısıyla verilen seri mutlak yakınsak bir seri olur.

ii. $a_n=\frac{1}{\sqrt{n}}$ için $a_{n+1}<a_n$ ve $\lim\limits_{n\to+\infty}a_n=0$ olduğundan verilen alterne seri yakınsaktır. Ancak $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}$, $p=\frac{1}{2}<1$ olan bir p-serisi olup ıraksaktır. O halde verilen seri şartlı yakınsak bir seridir.

iii. Bu serinin karakterini α nın durumuna göre irdeleyeceğiz. Verilen serinin mutlak yakınsaklığını inceleyelim. Yani

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\left|\frac{\alpha^n}{\sqrt{n}}\right|$$

serisi α nın hangi değerleri için yakınsak olduğunu araştıralım. Burada $a_n=\left|\frac{\alpha^n}{\sqrt{n}}\right|$ dir. Bölüm kuralını uygularsak

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to+\infty}\frac{\left|\frac{\alpha^{n+1}}{\sqrt{n+1}}\right|}{\left|\frac{\alpha^n}{\sqrt{n}}\right|}=\left|\alpha\sqrt{\frac{n}{n+1}}\right|=|\alpha|$$

bulunur. Buna göre, $|\alpha|<1$ ise verilen seri mutlak yakınsak; $|\alpha|>1$ ise verilen seri ıraksak olur. $|\alpha|=1$ için bu kural ile herhangi birşey söylenemez. Onun için başka bir yoldan giderek $|\alpha|=1$ durumunu inceleyelim. Bilindiği gibi $|\alpha|=1$ ise $\alpha=1$ veya $\alpha=-1$ dir. $\alpha=1$ için verilen seri

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$$

olur. Bu $p = \frac{1}{2}$ olan bir p-serisi olup ıraksaktır. $\alpha = -1$ için

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$$

şeklinde bir alterne seri olur. Bu alterne seri yakınsaktır. Ancak bu seri mutlak yakınsak değildir. O halde $\alpha = -1$ için verilen seri şartlı yakınsaktır. Çözümü kısaca şöyle özetleyebiliriz: Verilen seri, $-1 < \alpha < 1$ için mutlak yakınsak; $\alpha = -1$ için şartlı yakınsak ve α nın diğer durumları için ıraksaktır.

Seriler Üzerinde İşlemler: Seriler ile yapılacak işlemleri maddeler halinde sıralayalım:

1. Yakınsak seriler ile terim terim toplama, terim terim çıkarma işlemleri yapılabilir ve elde edilen yeni seriler de sırasıyla serilerin yakınsadığı sayıların toplamına ve farkına yakınsar. Yani

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = s \text{ ve } \sum_{n=1}^{+\infty} b_n = s'$$

serileri için

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (a_n + b_n) = s + s' \text{ ve } \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n - b_n) = s - s'$$

olur.

Bu özellik kullanılarak bir seri için aşağıdaki düzenleme yapılabilir. Mutlak yakınsak bir seri gözönüne alalım. Bu seri

$$a - b - c + d + e + f - g + \cdots = s$$

olsun. Burada $a, b, c, \ldots$ pozitif sayılardır. Bu serinin pozitif ve negatif terimlerini alarak

$$a + 0 + 0 + d + e + f + 0 + \cdots = s_1$$
$$0 + b + c + 0 + 0 + 0 + g + \cdots = s_2$$

şeklinde pozitif terimli iki seri yazabiliriz. Birinci seriden ikinci seriyi terim terim çıkarırsak yukarıda verilen seri elde edilir. Bu durumda da $s = s_1 - s_2$ olur. Bu işlemin sadece mutlak yakınsak seriler için doğru olduğunu unutmamak gerekir. Eğer $a - b - c + d + e + f - g + \cdots$ serisi şartlı yakınsak olsaydı

$$a + 0 + 0 + d + e + f + 0 + \cdots$$
$$0 + b + c + 0 + 0 + 0 + g + \cdots$$

serilerinin her biri ıraksak olur (sonsuza yakınsar). Serinin şartlı yakınsaklığı bu sonsuzlar arasındaki *dengeye* bağlıdır. Yani, toplamların kendileri sonsuz olmasına rağmen kısmi toplamlar arasındaki fark sıfıra yaklaşabilir.

2. Yakınsak bir seri bir k sayısı ile terim terim çarpılırsa, elde edilen yeni seri birinci serinin yakınsadığı sayının k katına yakınsar. Buradan şunu da söyleyebiliriz: Bir seriyi bir sayı ile çarpmak serinin karakterini değiştirmez (ancak toplamını değiştirdiğini unutmayalım).

3. Yakınsak serinin terimleri keyfi şekilde gruplandırılabilir ve bu gruplandırma sonucunda elde edilen yeni seri verilen serinin yakınsadığı sayıya yakınsar. Yani,

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 + a_7 + a_8 + \cdots = s$$

ise

$$(a_1 + a_2) + a_3 + (a_4 + a_5 + a_6) + (a_7 + a_8) + \cdots = s$$

olur.

Eğer seri ıraksak ve $s = \infty$ ise keyfi şekilde gruplandırma ile elde edilen seri ıraksak olur. Ancak, eğer serinin ıraksaklığı $\lim\limits_{n \to +\infty} s_n$ limiti birbirinden farklı sayılar olması ile belirleniyorsa, gruplandırma ile elde edilen seri yakınsak veya ıraksak olabilir. Yakınsak olması durumunda toplam, gruplandırmayı yaparken parentezlere bağlı olarak, değişir. Örneğin,

$$\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1} = 1 - 1 + 1 - 1 + \cdots$$

ıraksak bir seri olmasına karşın gruplandırma yapıldığında

$$(1 - 1) + (1 - 1) + (1 - 1) + \cdots = 0 + 0 + 0 + \cdots = 0$$
$$1 + (-1 + 1) + (-1 + 1) + \cdots = 1 + 0 + 0 + \cdots = 1$$

bulunur.

4. Pozitif terimli yakınsak bir seri gözönüne alalım. Bu seri ile serinin terimlerinin yeniden düzenlenmesi ile elde edilen yeni serinin toplamı eşittir. Bunu şu şekilde düşünürüz: Pozitif terimli serinin terimlerinin sırasını keyfi olarak değiştirip elde edilen yeni serinin kısmi toplamlarını yazarsak, verilen serinin herhangi bir terimi yeni serinin kısmi toplamlarından birinde olacaktır. Bu durumda verilen serinin herhangi bir kısmi toplamı yeni serinin bir kısmi toplamının parçası olur. Buna göre verilen serinin kısmi toplamlar dizisinin limiti, yeni serinin kısmi toplamlar dizisinin limitinden büyük olamaz. Diğer yandan yeni serinin elemanlarını düzenleyerek baştaki seri elde edilir. Yukarıdaki muhakemeden dolayı yeni serinin limiti verilen serinin limitinden büyük olamaz. O halde iki serinin toplamı eşit olur.

Mutlak yakınsak bir seri ile bu serinin terimlerinin sırasını keyfi olarak değiştirerek elde edilen yeni serinin toplamları eşittir. Yukarıda, 1.maddede gösterildiği gibi, bir mutlak yakınsak seri iki pozitif yakınsak serinin farkı olarak gösterilebilir. Böylece verilen serinin terimlerinin yeniden düzenlenmesi bu iki pozitif terimli serinin terimlerinin yeniden düzenlenmesi demektir ve toplama bir etkileri olmaz.

Şartlı yakınsak serinin terimleri yeniden düzenlenirse herhangi bir sayıya yakınsayan veya ıraksak olan bir seri elde edilir. Birinci halde bir çelişki ortaya çıkar. Bunu bir örnekle daha açık olarak gösterelim:

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\frac{1}{7}-\frac{1}{8}+\frac{1}{9}-\frac{1}{10}+\frac{1}{11}-\cdots=s$$

şartlı yakınsak serisini gözönüne alalım. Bu seriyi $\frac{1}{2}$ ile çarparsak

$$\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{6}-\frac{1}{8}+\frac{1}{10}-\cdots=\frac{s}{2}$$

ve buradanda

$$0+\frac{1}{2}+0-\frac{1}{4}+0+\frac{1}{6}+0-\frac{1}{8}+0+\frac{1}{10}+0-\frac{1}{12}+\cdots=\frac{s}{2}$$

yazarız. İlk seri ile bu son seriyi terim terim toplarsak

$$1+\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}-\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{11}-\frac{1}{6}+\cdots=\frac{3}{2}s$$

olur. Seriler aynı terimlerden oluşmasına rağmen toplamları farklıdır.

Böylece bir serinin terimlerinin yeniden düzenlenmesi ile ilgilenirken mutlak yakınsak seriler ile sonlu toplammış gibi işlem yapacağız. Ancak şartlı yakınsak serilerle aynı işlemi yaparken daha dikkatli davranmalıyız.

5. $\sum a_n$ serisi verilsin. Bu serinin n.kısmi toplamını s_n, geri kalan toplamıda r_n ile gösterirsek, yani

$$s_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n \text{ ve } r_n = a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots$$

ise

$$\sum a_n = s_n + r_n$$

yazılır. Burada r_n ye serinin (n.terimden sonraki) kalanı adı verilir. Eğer verilen seri yakınsak ve toplamı s ise $\lim\limits_{n\to+\infty} s_n = s$ ve $\sum a_n = s$ dir. Bu durumda

$$s = s_n + r_n$$

yazılır ve her iki yanın $n \to +\infty$ için limiti alınırsa

$$\lim_{n\to+\infty} r_n = 0$$

bulunur. Bunu şu şekilde ifade ederiz: *Yakınsak bir serinin (n.terimden sonraki) kalanı n $\to$ + ∞ için sıfırdır.*

6. Bir seriye sonlu sayıda terim ilave eder veya çıkarırsak serinin karakteri değişmez. Ancak seri yakınsak ise toplamı değişir.

Alıştırmalar

1. Aşağıdaki serilerin karakterini belirtiniz.

i. $\sum \frac{1}{n\ln n}$ **ii.** $\sum \frac{n}{n^2+1}$ **iii.** $\sum \frac{4}{n(n+1)}$

iv. $\sum \frac{1}{n^2-1}$ **v.** $\sum \frac{1}{2^n+1}$ **vi.** $\sum \frac{\ln n}{n}$

vii. $\sum \frac{1}{\sqrt[3]{n}}$ **viii.** $\sum \frac{n+1}{n\sqrt{3n-2}}$ **ix.** $\sum \frac{1}{1+\ln n}$

x. $\sum \frac{n^2}{(\ln 2)^n}$ **xi.** $\sum \frac{n^n}{n!}$ **xii.** $\sum \left(\frac{3}{4}\right)^n$

xiii. $\sum \left(\frac{4}{3}\right)^n$ **xiv.** $\sum n\left(\frac{3}{4}\right)^n$ **xv.** $\sum \frac{1}{n^n}$

xvi. $\sum \left(\frac{n}{n^2+2}\right)^n$ **xvii.** $\sum \frac{1}{(\ln n)^n}$ **xviii.** $\sum (-1)^{n+1}\frac{1}{n^2}$

xix. $\sum \frac{(-1)^n}{\ln n}$ **xx.** $\sum \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}$ **xxi.** $\sum \frac{(-1)^{n-1}}{n!}$

2. Aşağıdaki serilerin şartlı ve mutlak yakınsaklığını inceleyiniz.

i. $\sum \frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)^2}$ **ii.** $\sum (-1)^{n-1}\frac{n^2}{n^5+4}$ **iii.** $\sum \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n(n+1)}}$

6.5. Kuvvet Serileri

Bazen değişken içeren serilerle karşılaşabiliriz. Bu serilerin en kullanışlı olanı kuvvet serileridir. Bu başlık altında kuvvet serileri ile ilgili temel bilgiler vereceğiz.

6.5.1. Tanım: x bir değişken ve c bir sabit olmak üzere

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(x-c)^n = a_0 + a_1(x-c) + a_2(x-c)^2 + \cdots + a_n(x-c)^n + \cdots$$

serisine c merkezli kuvvet serisi denir.

Eğer bu tanımda $c = 0$ alınırsa

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + \cdots$$

elde edilir. Ayrıca $x = c$ olması durumunda $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(x-c)^n = a_0$ alınacaktır.

6.5.2. Örnek: ***i.*** 6.5.1. Tanıma göre

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots$$

serisi 0 merkezli kuvvet serisidir.

ii.

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}(x-3)^n = (x-3) + \frac{1}{2}(x-3)^2 + \cdots$$

serisi 3 merkezli kuvvet serisidir.

iii.

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}(x+3)^n = (x+3) + \frac{1}{2}(x+3)^2 + \cdots$$

seriside -3 merkezli kuvvet serisidir.

Bir kuvvet serisi verildiğinde x in yerine yazılacak her bir reel sayı için bir sayı dizisi elde edilir. x yerine yazılacak bazı reel sayılar için elde edilen seri yakınsak bazıları için de ıraksak olacaktır. Serinin yakınsak olduğu sayılar için toplamın bir anlamı olduğunu biliyoruz. Dolayısıyla tanım kümesi kuvvet serisinin yakınsadığı bütün x lerin oluşturduğu küme olmak üzere kuvvet serisine x in bir fonksiyonu olarak bakılabilir ve

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n(x-c)^n$$

olarak yazılabilir. İşte bu fonksiyonun tanım kümesini bulma, ilgileneceğimiz esas konudur. Bu tanım kümesini bulma, aynı zamanda, verilen kuvvet serisinin hangi x ler için yakınsak olacağını belirlemektir. Bir kere

$$f(c) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n(c-c)^n = a_0$$

olduğundan her kuvvet serisi c merkezinde yakınsar. Dolayısıyla c merkezi fonksiyonun tanım kümesindedir. Aşağıdaki teorem bize kuvvet serisinin yakınsadığı noktalar hakkında bilgi vermektedir.

6.5.3. Teorem: $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(x-c)^n$, c merkezli kuvvet serisi için aşağıdaki üç önermeden biri daima doğrudur:

i. Seri sadece c de yakınsaktır.

ii. Öyle bir $R > 0$ sayısı vardırki $|x-c| < R$ için seri (mutlak) yakınsak, $|x-c| > R$ için seri ıraksaktır.

iii. Seri x in her değeri için yakınsaktır.

6.5.4. Tanım: 6.5.3. Teoremin ii. maddesindeki R sayısına kuvvet serisinin yakınsaklık yarıçapı denir. Kuvvet serisinin yakınsadığı bütün x değerlerinin oluşturduğu kümeye de yakınsaklık aralığı adı verilir.

Eğer $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(x-c)^n$ kuvvet serisi sadece c noktasında yakınsak ise yakınsaklık yarıçapı $R = 0$; eğer x in her değeri için yakınsıyorsa yakınsaklık yarıçapı $R = +\infty$ alınır. Bir kuvvet serisinin yakınsaklık yarıçapını bulmak için, daha çok, bölüm kuralını veya kök kuralını kullanırız. Hatırlanacağı gibi serinin genel terimi u_n ise

$$\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| < 1$$

olması halinde seri yakınsak olur. Kuvvet serisinde $u_n = a_n(x-c)^n$ olduğunu biliyoruz. Buna göre

$$\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| < 1 \Rightarrow \lim_{n\to+\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right||x-c| < 1 \Rightarrow |x-c| < \lim_{n\to+\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$$

yazılır. Bu durumda yakınsaklık yarıçapı R,

$$R = \lim_{n\to+\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$$

olur. Benzer şekilde kök kuralı kullanılarak da R yakınsaklık yarıçapı,

$$R = \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{|a_n|^{1/n}}$$

formülü ile de bulunur. Burada a_n nin kuvvet serisindeki $(x-c)^n$ nin katsayısı olduğunu hatırlatalım. Bu formüller limitlerin olması durumunda geçerlidir.

6.5.5. Örnek: Aşağıdaki kuvvet serilerinin yakınsaklık yarıçapını bulunuz.

i. $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} n!x^n$ *ii.* $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} 3(x-2)^n$ *iii.* $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}$

Çözüm: *i.* Burada $a_n = n!$ dir. O halde yakınsaklık yarıçapı

$$R = \lim_{n\to+\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to+\infty}\left|\frac{n!}{(n+1)!}\right| = \lim_{n\to+\infty}\left|\frac{1}{n+1}\right| = 0$$

bulunur. $R = 0$ olduğundan verilen kuvvet serisi sadece $x = 0$ için yakınsaktır.

ii. $a_n = 3$ olduğundan yakınsaklık yarıçapı

$$R = \lim_{n\to+\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to+\infty}\left|\frac{3}{3}\right| = 1$$

olur. Buna göre verilen kuvvet serisi $|x-2| < 1$ için mutlak yakınsaktır. Mutlak değerin özelliklerinden yararlanarak $-1 < x-2 < 1$ veya $1 < x < 3$

olur. Demek ki verilen kuvvet serisi $1 < x < 3$ şartını sağlayan x ler için mutlak yakınsaktır. $|x-2| > 1$ için verilen seri ıraksak olur.

iii. $a_n = \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}$ dir. Yakınsaklık yarıçapı

$$R = \lim_{n\to+\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to+\infty} \left|\frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \frac{(2n+3)!}{(-1)^{n+1}}\right| = +\infty$$

olduğundan x in her değeri için yakınsaktır.

6.5.5. Örneğin *ii.* şıkkında verilen serinin $1 < x < 3$ aralığında yakınsak, $x < 1$ ve $x > 3$ için de ıraksak olduğunu gördük. Ancak aralığın uç noktalarında yani, $x = 1$ ve $x = 3$ için verilen serinin karakterinin ne olduğu hakkında bir şey söylemedik. Yakınsaklık yarıçapı sonlu bir sayı olan her kuvvet serisi için aynı durumla karşılaşırız. Yakınsaklık aralığının uç noktalarında serinin karakterini belirlemek için bu noktaların her birini ayrı ayrı test etmek gerekir. Serinin yakınsak olduğu noktayı yakınsaklık aralığına dahil ederiz. O halde, R yakınsaklık yarıçapı olmak üzere, yakınsaklık aralığı $(c-R, c+R)$ aralığı ile serinin yakınsak olduğu uç noktalardan oluşur. Bunun için aşağıdaki örneği inceleyelim:

6.5.6. Örnek: Aşağıdaki her bir kuvvet serisinin yakınsaklık aralığını bulunuz.

i. $\sum_{n=0}^{+\infty} 3(x-2)^n$ *ii.* $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n}$ *iii.* $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n^2}$

Çözüm: *i.* 6.5.5. Örnekte bu serinin yakınsaklık yarıçapının $R = 1$ olduğunu gördük. Dolayısıyla verilen kuvvet serisi $1 < x < 3$ aralığında mutlak yakınsaktır. Şimdi uç noktalardaki durumu inceleyelim: $x = 1$ için verilen kuvvet serisi $\sum_{n=0}^{+\infty} 3(-1)^n$ şeklinde alterne seri olup ıraksaktır. Diğer yandan $x = 3$ için $\sum_{n=0}^{+\infty} 3$ olup ıraksak bir seridir. Dolayısıyla verilen kuvvet serisinin yakınsaklık aralığı $1 < x < 3$ olur.

ii. $a_n = \frac{1}{n}$ olduğundan yakınsaklık yarıçapı

$$R = \lim_{n\to+\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to+\infty} \left|\frac{1}{n} \frac{n+1}{1}\right| = 1$$

olur. Buna göre verilen seri $|x| < 1$ veya $-1 < x < 1$ aralığında mutlak yakınsaktır. Uç noktalardaki durumu inceleyelim: $x = -1$ için $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ alterne serisi bulunur. Bu alterne seri yakınsaktır. Dolayısıyla $x = -1$ noktasını yakınsaklık aralığına dahil edeceğiz. Diğer yandan $x = 1$ için $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$ harmonik serisi elde edilir. Bilindiği gibi bu seri ıraksaktır. Dolayısıyla $x = 1$ i yakınsaklık aralığına dahil edemeyiz. Demek ki verilen kuvvet serisinin yakınsaklık aralığı $-1 \leq x < 1$ dir.

iii. $a_n = \frac{1}{n^2}$ dir. Yakınsaklık yarıçapı

$$R = \lim_{n \to +\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n \to +\infty} \left|\frac{1}{n^2}\frac{(n+1)^2}{1}\right| = 1$$

olduğundan verilen seri $|x| < 1$ veya $-1 < x < 1$ için mutlak yakınsaktır. Aralığın uç noktalarındaki durumu inceleyelim: $x = -1$ için verilen seri $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$ şeklinde yakınsak bir alterne seri; $x = 1$ için de verilen seri $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ şeklinde yakınsak bir seri olur. Dolayısıyla verilen kuvvet serisinin yakınsaklık aralığı $-1 \leq x \leq 1$ dir.

Aşağıda vereceğimiz teorem kuvvet serisi ile tanımlanan bir fonksiyonun nerede sürekli, türevlenebilir ve integrallenebilir olması hakkındadır.

6.5.7. Teorem: Yakınsaklık yarıçapı $R > 0$ olan

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (x-c)^n$$

fonksiyonunu gözönüne alalım. $f(x)$ fonksiyonu $|x - c| < R$ veya $(c - R, c + R)$ aralığında sürekli, diferensiyellenebilir ve integrallenebilirdir. $f(x)$ fonksiyonunun bu aralıktaki türevi

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n (x-c)^{n-1} = a_1 + 2a_2(x-c) + \cdots$$

ve integrali

$$\int f(x)dx = k + a_0(x-c) + a_1\frac{(x-c)^2}{2} + \cdots$$

şeklindedir.

$f(x)$, kuvvet serisi ile verilen bir fonksiyon olmak üzere $f(x)$, $f'(x)$ ve $\int f(x)dx$ ile belirlenen kuvvet serilerinin yakınsaklık yarıçapları eşittir. Ancak yakınsaklık aralığının uç noktalarında farklı davranış gösterebilirler.

Alıştırmalar

1. Aşağıdaki her bir serinin yakınsaklık yarıçapını ve yakınsaklık aralığını bulunuz.

i. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n^2}$ **ii.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{n^2(n+2)}(x+2)^n$ **iii.** $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{3^{2n}}{n+1}(x-2)^n$

iv. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^{9n}}{27^{n^2}}x^n$ **v.** $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{(2n+1)^2 2^n}$ **vi.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n^2+1}x^n$

2. Aşağıdaki kuvvet serilerinin her biri için türevini ve integralini alabileceğimiz aralığı bulunuz. Bu aralıkta türev ve integralini alınız. Elde edilen yeni kuvvet serilerinin yakınsaklık aralığını bulunuz. Bu aralığı verilen serinin yakınsaklık aralığı ile karşılaştırınız.

i. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n^2}$ **ii.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{n^2(n+2)}(x+2)^n$ **iii.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^{9n}}{27^{n^2}}x^n$

6.6. Fonksiyonların Kuvvet Serisine Açılması

Hatırlanacağı gibi $|r| < 1$ olmak üzere

$$\sum_{n=0}^{+\infty} ar^n = \frac{a}{1-r}$$

dir. Burada $a = 1$, $r = x$ alınırsa

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots, \quad |x| < 1$$

yazılır. $1+x+x^2+\cdots$ serisi $f(x)=\frac{1}{1-x}$ fonksiyonunu sadece $(-1,1)$ aralığında temsil eder. Dikkat edilmelidir ki $f(x)$ fonksiyonu $x\neq 1$ olmak üzere her reel sayı için tanımlıdır. Diğer aralıklarda fonksiyon başka serilerle temsil edilir. Örneğin, -1 merkezli bir kuvvet serisi elde etmek için

$$\frac{1}{1-x}=\frac{1}{2-(x+1)}=\frac{1/2}{1-\frac{x+1}{2}}=\frac{a}{1-r}$$

yazılır. Burada $a=1/2$, $r=\frac{x+1}{2}$ ve $|x+1|<2$ olmak üzere

$$\frac{1}{1-x}=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{2}\left(\frac{x+1}{2}\right)^n, \quad |x+1|<2$$

bulunur. Bu da $(-3,1)$ aralığında yakınsar. Benzer şekilde değişik merkezler seçerek değişik seriler elde ederiz.

Kuvvet serileri ile işlem yaparken uyulacak kurallar aşağıdaki teoremde verilmiştir.

6.6.1. Teorem: $f(x)=\sum a_n x^n$ ve $g(x)=\sum b_n x^n$ serileri verilsin. Bu durumda

i. $f(kx)=\sum a_n k^n x^n$ **ii.** $f(x^k)=\sum a_n x^{nk}$

iii. $f(x)\pm g(x)=\sum(a_n\pm b_n)x^n$ **iv.** $f(x)g(x)=(\sum a_n x^n)(\sum b_n x^n)$

olur.

Bu teoremdeki işlemler neticesinde yakınsaklık aralığı değişebilir. Örneğin $f(x)=\sum a_n x^n$ ve $g(x)=\sum b_n x^n$ fonksiyonlarını gözönüne alalım. Birinci serinin yakınsaklık aralığı (veya $f(x)$ fonksiyonunun tanım kümesi) (a, b); ikinci serinin yakınsaklık aralığı (veya $g(x)$ fonksiyonunun tanım kümesi) (c, d) ise bu iki serinin toplamının yakınsaklık aralığı (veya $f(x)+g(x)$ fonksiyonunun tanım kümesi) $(a,b)\cap(c,d)$ dir.

6.5.7. Teorem ve 6.6.1. Teorem kullanılarak verilmiş kuvvet serilerinden yararlanarak yeni kuvvet serileri elde edilebilir. Bunu örnekle izah edelim:

6.6.2. Örnek: $f(x)=\frac{1}{1+x}$ fonksiyonunu 0 merkezli kuvvet serisine açınız. Bu kuvvet serisinden istifade ederek $g(x)=\ln(1+x)$ fonksiyonunun 0 merkezli kuvvet serisini bulunuz.

Çözüm: Bilindiği gibi, $|x| < 1$ olmak üzere

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n + \cdots$$

şeklindedir. $f(x) = \frac{1}{1+x}$ olarak verildiğinden $f(-x) = \frac{1}{1-x}$ olur. 6.6.1. Teoremin i.şıkkından dolayı, $|x| < 1$ olmak üzere

$$\frac{1}{1+x} = \frac{1}{1-(-x)} = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots + (-1)^n x^n + \cdots$$

yazılır.

6.5.7. Teoreme göre, $-1 < x < 1$ aralığında, bu son eşitlikte her iki yanın integralini alırsak,

$$\int \frac{dx}{1+x} = \int \left(1 - x + x^2 - x^3 + \cdots + (-1)^n x^n + \cdots\right) dx$$

ve buradan da $-1 < x \leq 1$ olmak üzere

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} + \cdots$$

elde edilir.

Kuvvet serilerinin en güzel uygulamalarından biri yaklaşık hesaplamalarda kullanılabilmesidir. Örneğin, $\ln 1.1$ ve $\ln 2$ nin yaklaşık olarak değerini bulmak için

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} + \cdots$$

ifadesinde $x = 0.1$ alınarak $\ln 1.1$ ve $x = 1$ alınarak da $\ln 2$ hesaplanır. Ancak $x = -1$, $x = 3$ alındığında bu eşitlik kullanılarak bir sonuca ulaşılamaz. Çünkü bu açılım sadece $(-1, 1]$ aralığındaki x ler için geçerlidir. Bir başka deyişle

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} + \cdots$$

serisi sadece $(-1, 1]$ aralığında yakınsaktır.

Aşağıda vereceğimiz teorem verilen keyfi bir fonksiyonun kuvvet serisine açılması için bir formül verir.

6.6.3. Teorem: Bir $f(x)$ fonksiyonu c yi ihtiva eden bir açık aralıktaki bütün x ler için

$$f(x) = \sum a_n (x-c)^n$$

şeklinde kuvvet serisine açılıyorsa

$$a_n = \frac{f^{(n)}(c)}{n!}$$

şeklindedir. Bu durumda kuvvet serisi

$$f(x) = f(c) + f'(c)(x-c) + \frac{f''(c)}{2!}(x-c)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-c)^n + \cdots$$

veya kısaca

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-c)^n$$

şeklini alır.

6.6.4. Tanım: Eğer $f(x)$ fonksiyonunun $x = c$ de her mertebebeden türevi varsa

$$f(c) + f'(c)(x-c) + \frac{f''(c)}{2!}(x-c)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-c)^n + \cdots$$

serisine $f(x)$ fonksiyonunun c deki Taylor serisi denir. Eğer $c = 0$ alınırsa bu seriye $f(x)$ fonksiyonunun Maclaurin serisi adı verilir.

Dikkat edilirse, tanımda

$$f(x) = f(c) + f'(c)(x-c) + \frac{f''(c)}{2!}(x-c)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-c)^n + \cdots$$

(yani fonksiyon eşittir seri) yazmadık. Çünkü, ifade bize biraz şaşırtıcı gelecektir ama, bu Taylor serisinin $f(x)$ fonksiyonuna yakınsadığını garanti edemiyoruz. Dikkat etmek gerekir ki, 6.6.3. Teorem bize şunu söylüyor: Bir kuvvet serisi $f(x)$ fonksiyonuna yakınsıyorsa o kuvvet serisi Taylor serisidir. Bu teorem, katsayıları $f(x)$ fonksiyonunun türevi ile belirlenen, Taylor serisinin $f(x)$ e yakınsaması ile ilgili hiç bir şey söylemiyor.

n.dereceden

$$p(x) = b_0 + b_1 x + \cdots + b_n x^n$$

polinomunu gözönüne alalım. Bu polinomu $(x-c)$ nın kuvvetleri cinsinden yazmak istersek, $x = (x-c)+c$ eşitliğini kullanarak

$$p(x) = a_0 + a_1(x-c) + \cdots + a_n(x-c)^n$$

elde edilir. Burada $a_k = \frac{p^{(k)}(c)}{k!}$ $(0 \le k \le n)$ dir. Böylece

$$p(x) = p(c) + p'(c)(x-c) + \cdots + \frac{p^{(n)}(c)}{n!} = \sum_{k=0}^{n} \frac{p^{(k)}(c)}{k!}(x-c)^k$$

yazılır. Bu ifadede $p(x)$ polinomu yerine, $x = c$ noktasını kapsayan bir aralıkta tanımlı ve bu noktada $(n+1)$.mertebeye kadar türevleri sürekli, keyfi bir $f(x)$ fonksiyonu alırsak bu eşitliğin sağlanamayacağını görürüz. Bu durumda

$$f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(c)}{k!}(x-c)^k = R_n(x)$$

yazılır. Yani

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(c)}{k!}(x-c)^k + R_n(x)$$

olur. Hatta daha kısa olarak

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(c)}{k!}(x-c)^k$$

alınırsa $f(x) = P_n(x) + R_n(x)$ yazılır. $f(x) = P_n(x) + R_n(x)$ ifadesine $f(x)$ fonksiyonunun $x = c$ noktası civarındaki Taylor formülü denir. Burada $P_n(x)$ e Taylor polinomu adı verilir. Örneğin, bir f fonksiyonuna $(x_0, f(x_0))$ noktasından çizilen teğetin denklemi olan $P_1(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ bir Taylor polinomudur. $f(x) = P_n(x) + R_n(x)$ ifadesindeki $R_n(x)$ e de Taylor kalanı adı verilir. $R_n(x)$ Taylor kalanı, z, x ile c arasında olmak üzere

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(z)}{(n+1)!}(x-c)^{n+1}$$

şeklinde yazılır. Bu, $R_n(x)$ kalanı için Lagrange formülü olarak bilinir.

Aşağıdaki teorem $f(x)$ in Taylor serisinin ne zaman $f(x)$ e yakınsayacağı hakkında bilgi vermektedir.

6.6.5. Teorem: f fonksiyonu c merkezli bir açık aralıkta her mertebeden türeve sahip olsun. Bu durumda

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-c)^n$$

olması için gerek ve yeter şart $\lim_{n\to+\infty} R_n(x) = 0$ olmasıdır.

İspat: Taylor serisinin kısmi toplamı $P_n(x)$ dir. $f(x) = P_n(x) + R_n(x)$ ifadesinden

$$\lim_{n\to+\infty} P_n(x) = \lim_{n\to+\infty}(f(x) - R_n(x)) = f(x) - \lim_{n\to+\infty} R_n(x)$$

yazılır. Böylece Taylor serisinin $f(x)$ e yakınsaması için gerek ve yeter şart $\lim_{n\to+\infty} R_n(x) = 0$ olmasıdır.

6.6.6. Örnek: Aşağıdaki her bir fonksiyonu (Maclaurin serisine) $x = 0$ civarında Taylor serisine açınız. Bu serilerin yakınsaklık aralığını bulunuz. Serinin verilen fonksiyona yakınsayıp yakınsamadığını araştırınız.

i. $f(x) = \sin x$ *ii.* $f(x) = \cos x$ *iii.* $f(x) = e^x$

Çözüm: *i.*

$$\begin{array}{ll} f(x) = \sin x, & f(0) = 0 \\ f'(x) = \cos x & f'(0) = 1 \\ f''(x) = -\sin x & f''(0) = 0 \\ f'''(x) = -\cos x & f'''(0) = -1 \\ \vdots & \vdots \end{array}$$

olduğundan $f(x) = \sin x$ fonksiyonunun Maclaurin serisi

$$x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \cdots$$

olur. Bu serinin yakınsaklık aralığının $-\infty < x < +\infty$ olduğu görülür. z, 0 ile x arasında bir sayı olmak üzere kalan terim

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(z)}{(n+1)!}x^{n+1}$$

şeklindedir. Burada $|f^{(n+1)}(z)| = |\cos z|$ veya $|f^{(n+1)}(z)| = |\sin z|$ dir. Bu durumda

$$0 \leq |R_n(x)| = \frac{|f^{(n+1)}(z)|}{(n+1)!}|x|^{n+1} \leq \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}$$

ifadesinden $\lim_{n\to+\infty} R_n(x) = 0$ dır. Dolayısıyla bulunan Maclaurin serisi her x için $f(x) = \sin x$ fonksiyonuna yakınsar ve

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \cdots$$

yazılır.

ii.

$$\begin{array}{ll} f(x) = \cos x, & f(0) = 1 \\ f'(x) = -\sin x & f'(0) = 0 \\ f''(x) = -\cos x & f''(0) = -1 \\ f'''(x) = \sin x & f'''(0) = 0 \\ \vdots & \vdots \end{array}$$

olduğundan $f(x) = \cos x$ fonksiyonunun Maclaurin serisi

$$1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \cdots$$

olur. Bu serinin yakınsaklık aralığının $-\infty < x < +\infty$ olduğu görülür. z, 0 ile x arasında bir sayı olmak üzere kalan terim

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(z)}{(n+1)!}x^{n+1}$$

şeklindedir. Burada $|f^{(n+1)}(z)| = |\cos z|$ veya $|f^{(n+1)}(z)| = |\sin z|$ dir. Bu durumda her n pozitif tam sayısı için

$$0 \leq |R_n(x)| = \frac{|f^{(n+1)}(z)|}{(n+1)!}|x|^{n+1} \leq \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}$$

ifadesinden $\lim_{n\to+\infty} R_n(x) = 0$ dır. Dolayısıyla bulunan Maclaurin serisi her x için $f(x) = \cos x$ fonksiyonuna yakınsar ve

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \cdots$$

yazılır.

iii. Bilindiği gibi $f(x) = e^x$ ise $f^{(n)}(x) = e^x$ dir. Buna göre $f(x) = e^x$ fonksiyonunun Maclaurin serisi

$$1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots$$

olur. Bu seri her x için yakınsaktır. z, 0 ile x arasında bir sayı olmak üzere kalan terim

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(z)}{(n+1)!} x^{n+1} = \frac{e^z}{(n+1)!} x^{n+1}$$

şeklindedir. $0 < x$ ise $e^z < e^x$ olur. Bu durumda her pozitif n tam sayısı için

$$0 < R_n(x) = \frac{e^x}{(n+1)!} x^{n+1}$$

ifadesinden $\lim_{n \to +\infty} R_n(x) = 0$ dır. $x < 0$ ise $z < 0$ ve $e^z < e^0 = 1$ olur. Bu durumda da her x için

$$0 < |R_n(x)| = \left| \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \right|$$

ifadesinden $\lim_{n \to +\infty} R_n(x) = 0$ bulunur. Dolayısıyla bulunan Maclaurin serisi her x için

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots$$

yazılır.

Aşağıdaki örnek, bir $f(x)$ fonksiyonu ile elde edilen Taylor serisinin yakınsadığı fonksiyonun $f(x)$ olması gerekmediği ile ilgilidir.

6.6.7. Örnek: $f(x)$ fonksiyonu

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

olarak veriliyor. Bu fonksiyonun $x = 0$ noktası civarındaki Taylor serisini bulunuz. Bu Taylor serisi hangi noktalarda yakınsar? Yakınsadığı bu noktalarda toplam $f(x)$ fonksiyonu mudur?

Çözüm: Türevin tanımını kullanarak

$$f'(0) = \lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0}\frac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x} = 0$$

bulunur. Bu şekilde devam edersek

$$f^{(n)}(0) = 0, \quad n = 0, 1, 2, ...$$

olduğu görülür. Böylece $f(x)$ fonksiyonunun Maclaurin serisi

$$0 + \frac{0.x}{1!} + \frac{0.x^2}{2!} + \cdots$$

olur. Bu seride x in yerine yazılacak her sayı için toplam sıfırdır. Böylece $f(x)$ fonksiyonunun Maclaurin serisi her x için yakınsaktır. Diğer yandan $f(x)$ fonksiyonunun her dereceden Taylor polinomu $P_n(x) = 0$ olduğu dikkate alınırsa, Taylor formülünden

$$f(x) = 0 + R_n(x)$$

yazılır. Buradan

$$\lim_{n\to+\infty} R_n(x) = f(x)$$

elde edilir. $f(x)$ fonksiyonu sadece $x = 0$ için sıfır olduğundan elde edilen Maclaurin serisi sadece $x = 0$ noktasında $f(x)$ fonksiyonuna yakınsar.

Dolayısıyla bir fonksiyonun kendi Taylor serisine yakınsaması o fonksiyona bir ayrıcalık vermektedir. Buna göre şu tanımı verebiliriz:

6.6.8. Tanım: $f(x)$ fonksiyonu bir noktanın komşuluğunda yakınsak bir Taylor serisine açılabilirse bu fonksiyona o noktada analitik fonksiyon denir. Bir açık aralığın her noktasında analitik olan fonksiyona o aralıkta analitik fonksiyon adı verilir.

Bu tanıma göre 6.6.7. Örnekteki $f(x)$ fonksiyonu $x = 0$ noktasında analitik değildir.

Bazı fonksiyonların Maclaurin açılımları aşağıda verilmiştir:

Maclaurin serisi	*Yakınsaklık aralığı*
$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \cdots$	$-\infty < x < +\infty$
$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \cdots$	$-\infty < x < +\infty$
$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots$	$-\infty < x < +\infty$
$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} + \cdots$	$-1 < x \leq 1$
$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \cdots$	$-1 \leq x \leq 1$
$\arcsin x = x + \frac{x^3}{2.3} + \frac{1.3x^5}{2.4.5} + \cdots + \frac{(2n)!x^{2n+1}}{(2^n n!)^2(2n+1)} + \cdots$	$-1 \leq x \leq 1$

Bunlardan başka, k bir reel sayı olmak üzere *binom serisi* denen

$$(1+x)^k = 1 + kx + \frac{k(k-1)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{k(k-1)\cdots(k-n+1)}{n!}x^n + \cdots$$

şeklinde seri ile de karşılaşılır. Eğer k pozitif bir tamsayı ise bu seri bildiğimiz binom açılımına dönüşür. Bu serinin yakınsaklık yarıçapı $R = 1$ dir. Aralığın uçlarında serinin karakterinin ne olduğu k nın değerine bağlıdır.

6.6.9. Örnek: ***i.*** $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x}}$ fonksiyonunun binom serisini bulunuz.

Çözüm: $\frac{1}{\sqrt{1+x}} = (1+x)^{-1/2}$ olduğundan,

$$\begin{aligned}(1+x)^{-1/2} &= 1 - \frac{1}{2}x + \frac{(-\frac{1}{2})(-\frac{1}{2}-1)}{2!}x^2 + \frac{(-\frac{1}{2})(-\frac{1}{2}-1)(-\frac{1}{2}-2)}{3!}x^3 + \\ &\cdots + \frac{(-\frac{1}{2})(-\frac{1}{2}-1)(-\frac{1}{2}-2)\cdots(-\frac{1}{2}-n+1)}{n!}x^n + \cdots \\ &= 1 - \frac{1}{2}x + \frac{1.3}{2^2.2!}x^2 - \cdots + (-1)^n \frac{1.3.\cdots(2n-1)}{2^n n!}x^n + \cdots\end{aligned}$$

elde edilir.

ii. $f(x)$ fonksiyonu

$$f(x)=\begin{cases}\frac{\sin x}{x}, & x\neq 0\\ 1, & x=0\end{cases}$$

olmak üzere $\int_0^1 f(x)dx$ integralini hesaplayınız.

Çözüm: $f_1(x)=\frac{\sin x}{x}$ ilkeli olmayan bir fonksiyondur. Yani, bu fonksiyonun belirsiz integrali yoktur. Dolayısıyla bildiğimiz yolla verilen $\int_0^1 f(x)dx$ integralini hesaplayamayız. Ancak, seriler yardımıyla bu integralin yaklaşık olarak hesaplanabileceğini göreceğiz. Böylece kuvvet serilerinin faydasını bir kez daha gözler önüne sermiş olacağız. $[0,1]$ aralığında

$$f(x)=\frac{\sin x}{x}=\frac{x-\frac{x^3}{3!}+\cdots}{x}=1-\frac{x^2}{3!}+\cdots$$

olduğundan,

$$\begin{aligned}\int_0^1 f(x)dx &= \int_0^1 (1-\frac{x^2}{3!}+\cdots)dx\\ &= (x-\frac{x^3}{18}+\cdots)|_0^1\\ &= 1-0.05556+\cdots\\ &\approx 0.9444\end{aligned}$$

elde edilir.

Alıştırmalar

1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ ve $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n x^n$ serilerinin toplamı

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n+\sum_{n=1}^{\infty} b_n x^n=\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n)x^n$$

olarak tanımlanır. Buna göre

$$x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+\cdots$$

ve

$$x - \frac{x^3}{2!} + \frac{x^5}{4!} - \frac{x^7}{6!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n)!} + \cdots$$

serilerinin toplamını bulunuz.

2. Aşağıdaki fonksiyonları karşısında verilen noktada Taylor serisine açınız.

i. $f(x) = \ln(x+1),\ x = 1$ **ii.** $f(x) = e^x,\ x = 2$

iii. $f(x) = \sin x,\ x = \frac{\pi}{2}$ **iv.** $f(x) = \frac{1}{x},\ x = -1$

v. $f(x) = e^{-x},\ x = -2$ **vi.** $f(x) = x^2 + 1,\ x = 5$

3. $f(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ ise $f(x^k) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n (x^k)^n$ olduğunu biliyoruz. Buna göre $f(x) = e^{x^2}$ fonksiyonunun $x = 0$ civarındaki Taylor serisini bulunuz.

4. Aşağıdaki fonksiyonları binom serisine açınız.

i. $f(x) = \sqrt{1+x}$ **ii.** $f(x) = \sqrt[3]{1+x}$ **iii.** $f(x) = (1+x)^{-1}$

5. $\int_0^1 \sin x^2 dx$ integralini yaklaşık olarak hesaplayınız.