

2011-2012 GÜZ DÖNEMİ MAT101 MATEMATİK I
Çalışma Soruları-4

Konu: Transandan Fonksiyonlar, İntegrasyon Teknikleri, L'Hospital Kuralı
Genelleştirilmiş İntegraller

1. dy/dx 'i hesaplayınız.

(a) $y = \ln(\ln(\sec(x)))$

(h) $\ln(1 - 2y) = 6^x y$

(b) $y = \frac{x \ln x}{1 + \ln x}$

(i) $y = x^3(\sin^{-1} x)^2$

(c) $y = \ln\left(\frac{\sqrt{\sin x \cos x}}{1 + 2 \ln x}\right)$

(j) $y = \cot^{-1} \frac{1}{x} - \tan^{-1} x$

(d) $y = (x^2 + 1)^{\log_3(x + 1)^{\ln 3}}$

(k) $y = \ln(\sinh x) - \coth^2 x$

(e) $y = (\sin x)^x$

(l) $y = \operatorname{sech}(\ln(2x + x^3))$

(f) $y = \sqrt[5]{\frac{(x^2 + 1)(x + 3)^{1/2}}{x - 1}}$

(m) $y = \sinh^{-1} \frac{1}{1 - x}$

(g) $y = \int_{e^{4\sqrt{x}}}^{e^{2x}} \ln t \, dt$

(n) $y = \ln(\cosh^{-1} x) - \cosh^{-1}(\ln x)$

(o) $y = e^{\operatorname{sech}^{-1}(x)}$

2. Aşağıdaki limitleri hesaplayınız.

(a) $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln(x)$

(h) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{2x/3}$

(b) $\lim_{x \rightarrow 0} (\cos(2x))^{1/x^2}$

(i) $\lim_{x \rightarrow \infty} (\ln 2x - \ln(x + 1))$

(c) $\lim_{x \rightarrow \infty} [x - (x + 2)e^{1/x}]$

(j) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\cot \frac{x}{2}\right)^{\frac{1}{\ln 3x}}$

(d) $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sinh^{-1} x)^{1/\log_3 x}$

(k) $\lim_{x \rightarrow (\pi/2)^-} (\cos x)^{\cos x}$

(e) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\int_0^x t \sin^{-1} \sqrt{1 - t^2} \, dt}{\log_2(x + 1) + x \sin \pi x}$

(l) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sinh^{-1} x - \sin^{-1} x}{2^x - e^{\sin x}}$

(f) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2 \tan^{-1} x^2 - \pi}{\sin(1/x)}$

(m) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\csc^{-1}(x)\right)^{e^x}$

(g) $\lim_{x \rightarrow \infty} x(1 - \tanh x)$

(n) $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1}{x - 1} \int_x^1 (\sin^{-1} t)^2 \, dt$

3. $y = \tan x$, $y = \ln x$ eğrilerinin ve $y = 0$, $x = \pi/3$ doğrularının sınırladığı bölgenin alanını bulunuz.

4. $y = e^x$, $y = x^2 - 1$ eğrilerinin ve $x = -1$, $x = 1$ doğrularının sınırladığı bölgenin alanını bulunuz.

5. $0 \leq x \leq 1$ için $y = \frac{a}{a^2 + x^2}$ ve x -ekseni arasında kalan alan $\pi/3$ ise $a > 0$ değerini bulunuz.

6.

$$\int \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}}$$

integralini iki farklı yöntemle hesaplayarak

$$\sin^{-1} \left(\frac{x-2}{2} \right) = 2 \sin^{-1} \left(\frac{\sqrt{x}}{2} \right) + C$$

eşitliğini gösteriniz. $\sin^{-1} x$ fonksiyonunun özelliklerini kullanarak C değerini bulunuz ve eşitliği doğrulayınız.

7. Aşağıdaki eşitliği doğrulayınız.

$$\int \ln(a^2 + x^2) dx = x \ln(a^2 + x^2) - 2x + 2a \tan^{-1} \frac{x}{a} + C$$

8. Herhangi bir $a > 1$ için aşağıdaki eşitliği doğrulayınız.

$$\int_1^a \ln x \, dx + \int_0^{\ln a} e^y \, dy = a \ln a.$$

9. Aşağıdaki integralleri hesaplayınız.

(a) $\int_{e^{\pi/3}}^1 \frac{dx}{x \cos(\ln 2 \log_2 x)}$

(j) $\int \frac{1 + \sinh 3x}{\cosh^2 3x} dx$

(b) $\int_e^1 \frac{dx}{x \sqrt{1 + (\ln x)^2}}$

(k) $\int x \ln(x+3) dx$

(c) $\int \left(\frac{2^{\ln x}}{x} + e^{\sin x} \cos x \right) dx$

(l) $\int \cos(\ln x) dx$

(d) $\int \left(\tan x + \frac{1 + \sin x}{\cos^2 x} \right) dx$

(m) $\int x^2 \sin x dx$

(e) $\int \frac{e^x}{\sqrt{e^{2x} - 1}} dx$

(n) $\int \sin^{-1} x dx$

(f) $\int \frac{7dx}{(x-1)\sqrt{x^2 - 2x - 48}}$

(o) $\int \tan^{-1} x dx$

(g) $\int_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{\tan^{-1} x} (1+x^2)}$

(p) $\int \sec^{-1} x dx$

(h) $\int_0^1 \frac{1 + \sinh \sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx$

(q) $\int \cosh^{-1} x dx$

(r) $\int \sqrt{x} \cosh \sqrt{x} dx$

(i) $\int \frac{dx}{1 + \cosh^2 x}$

(s) $\int \frac{2y^4}{y^3 - y^2 + y - 1} dy$

$$(t) \int \frac{e^x dx}{(e^x - 1)(e^{3x} - 1)}$$

$$(v) \int \frac{(x + 1)^2 \tan^{-1} 3x + 9x^3 + x}{(9x^2 + 1)(x + 1)^2} dx$$

$$(u) \int \frac{\cos x dx}{\sin^2 x + \sin x - 6}$$

$$(w) \int \frac{\sqrt{2 - 3x}}{\sqrt[3]{2 - 3x + 2}} dx$$

10. Aşağıdaki integralleri hesaplayınız.

$$(a) \int \sqrt{12 + 4x - x^2} dx$$

$$(h) \int (\sin 3x \cos 2x - \cos 3x \sin 2x) dx$$

$$(b) \int \frac{\sqrt{9 - x^2}}{x^2} dx$$

$$(i) \int_0^{2\pi} \sqrt{\frac{1 - \cos x}{2}} dx$$

$$(c) \int \frac{\cos^2 x dx}{1 + \sin 2x}$$

$$(j) \int \frac{dx}{\sin^2 x \cos^3 x}$$

$$(d) \int \frac{\sin 6x}{1 - \cos^4 3x} dx$$

$$(k) \int \frac{dx}{2 \sin x - \cos x + 5}$$

$$(e) \int_{\pi/3}^{\pi/4} \frac{dx}{1 + \sin x}$$

$$(l) \int \frac{dx}{\sin^2 x - 2 \cos^2 x}$$

$$(f) \int_{\pi/3}^{\pi/4} \frac{dx}{\sec x + \tan x}$$

$$(m) \int_{-5/2}^{1/2} \frac{2x + 5}{\sqrt{8 - 2x - x^2}} dx$$

$$(g) \int_{\pi/2}^{\pi/3} \frac{dx}{\sin x - \cos x}$$

11. Aşağıda verilen integrallerin değerlerini hesaplayınız veya yakınsaklıklarını inceleyiniz.

$$(a) \int_0^{\infty} \frac{dv}{(1 + v^2)(1 + \tan^{-1} v)}$$

$$(c) \int_{-\infty}^{\infty} e^{-|x|} dx$$

$$(b) \int_0^1 \frac{4r}{\sqrt{1 - r^4}} dr$$

$$(d) \int_0^1 \ln x dx$$

12. Aşağıda verilen integrallerden hangileri yakınsaktır. Cevaplarınızı açıklayınız.

$$(a) \int_1^{\infty} \frac{1}{e^x - 2^x} dx$$

$$(c) \int_{-\infty}^{-1} \frac{1}{x^2 + 1} dx$$

$$(b) \int_2^{\infty} \frac{\sqrt{r}}{\sqrt{r^4 - 1}} dr$$

$$(d) \int_0^1 \frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx$$

13. Aşağıdaki integrallerin hangi p değerleri için yakınsak olduğunu bulunuz.

$$(a) \int_1^2 \frac{dx}{x(\ln x)^p}$$

$$(b) \int_2^{\infty} \frac{dx}{x(\ln x)^p}$$

14. Aşağıdaki integralleri hesaplayınız.

(a) $\int_0^{\infty} \frac{\tan^{-1} x}{1+x^2} dx$

(b) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{3e^x + e^{-x}}$

(c) $\int_{-1}^{\infty} \frac{du}{(u+5)\sqrt{u+1}}$