

### ÇALIŞMA SORULARI-3

**Ders:** Mat101-103

**Konu:** İntegral

1. Aşağıdaki integralleri hesaplayın.

(a)  $\int \frac{t\sqrt{t} + \sqrt{t}}{t^2} dt,$

(b)  $\int \frac{9r^2}{\sqrt{1-r^3}} dr,$

(c)  $\int \frac{\sin(2t+1)}{\cos^2(2t+1)} dt,$

(d)  $\int \frac{18 \tan^2 x \sec^2 x}{(2 + \tan^3 x)} dx,$

(e)  $\int \frac{\cos \sqrt{\theta}}{\sqrt{\theta} \sin^2 \sqrt{\theta}} d\theta,$

(f)  $\int \frac{1}{\theta^2} \sin \frac{1}{\theta} \cos \frac{1}{\theta} d\theta,$

(g)  $\int (\theta^4 - 2\theta^2 + 8\theta - 2)(\theta^3 - \theta + 2) d\theta,$

(h)  $\int x^{1/3} \sin(x^{4/3} - 8) dx,$

(i)  $\int \frac{\sin \sqrt{\theta}}{\sqrt{\theta} \cos^3 \sqrt{\theta}} d\theta,$

(j)  $\int \frac{1 - \cos(6t)}{2} dt,$

(k)  $\int \frac{x + \sin x}{1 + \cos x} dx,$

(l)  $\int \frac{\sqrt{\tan x}}{\sin x \cos x} dx,$

(m)  $\int \frac{dx}{1 + \cos x},$

2. Aşağıdaki integralleri hesaplayın.

(a)  $\int x \sec x^2 \tan x^2 dx,$

(b)  $\int \frac{\cos^2 y}{7} dy,$

(c)  $\int \frac{x^4}{\sin^2 x^5} dx,$

(d)  $\int 1 - \cot^2 x dx,$

- (e)  $\int \frac{\csc \theta}{\csc \theta - \sin \theta} d\theta,$   
(f)  $\int \sin^{3/4} x \cos^3 x dx,$   
(g)  $\int \sin^2 x \cos^2 x dx$   
(h)  $\int \sqrt{1 + \cos 3x} dx$   
(i)  $\int 3\sqrt{\frac{2x^2 + 3}{x^{11}}} dx$   
(j)  $\int \sqrt{\frac{x^2 - 2x}{x^6}} dx$   
(k)  $\int \cos(3z + 4) dz$   
(l)  $\int y^3(y^4 + 1)^8 dy$   
(m)  $\int \tan^2 \theta d\theta$   
(n)  $\int \sin^2 5t \cos 5t dt$   
(o)  $\int \left(1 - \cos \frac{x}{2}\right)^2 \sin \frac{x}{2} dx$   
(p)  $\int \frac{18 \tan^2 x \sec^2 x}{(2 + \tan^3 x)^2} dx$   
(q)  $\int \frac{(2x - 1) \cos \sqrt{3(2x - 1)^2 + 6}}{\sqrt{3(2x - 1)^2 + 6}} dx$

3. Aşağıdaki eşitliklerin doğruluğunu gösterin.

$$\int \sin x \cos x dx = \frac{1}{2} \sin^2 x + c_1$$

$$\int \sin x \cos x dx = -\frac{1}{2} \cos^2 x + c_2$$

Sonuçları eşleştirerek  $c_1$  ve  $c_2$  arasındaki ilişkiyi yazın.

4.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(x_i) \Delta x$  limitini hesaplayarak integrallerin sonucunu bulunuz.

(a)  $\int_0^2 x^2 dx$

(b)  $\int_1^5 (4 - 3x) dx$

5. Aşağıdaki limitleri belirli integral olarak yazınız.

(a)  $\lim_{\|P\| \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n c_k^2 \Delta x_k, P [0, 2]$ 'nin bir parçalanışıdır.

(b)  $\lim_{\|P\| \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n (c_k^2 - 3c_k) \Delta x_k, P [-7, 5]$ 'nin bir parçalanışıdır.

- (c)  $\lim_{\|p\| \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n \frac{1}{1 - c_k} \Delta x_k$ ,  $P [2, 3]$ 'nin bir parçalanışıdır.
- (d)  $\lim_{\|p\| \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n \sqrt{4 - c_k^2} \Delta x_k$ ,  $P [0, 1]$ 'nin bir parçalanışıdır.
- (e)  $\lim_{\|p\| \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n \sec c_k \Delta x_k$ ,  $P [-\pi/4, 0]$ 'nin bir parçalanışıdır.

6. Aşağıdaki limitleri belirli integralin tanımını ve toplam formüllerini kullanarak hesaplayın.

- (a)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^3} (1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2)$
- (b)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{n^2 + 1^2} + \frac{2}{n^2 + 2^2} + \dots + \frac{n}{n^2 + n^2} \right)$
- (c)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{4n} \right)$
- (d)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left( \sin \frac{\pi}{n} + \sin \frac{2\pi}{n} + \sin \frac{3\pi}{n} + \dots + \sin \frac{n\pi}{n} \right)$
- (e)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^{3/2}} (1 + \sqrt{2} + \sqrt{3} + \dots + \sqrt{n})$

7. Aşağıda verilen fonksiyonların yanlarında belirtilen türevlerini hesaplayın.

- (a)  $y(x) = \int_0^x \sqrt{1+t^2} dt$ ,  $y' = ?$
- (b)  $y(x) = \int_{\sqrt{x}}^0 \sin t^2 dt$ ,  $y' = ?$
- (c)  $y(x) = \int_{\tan x}^0 \frac{1}{t^2} dt$ ,  $y'' = ?$
- (d)  $y(x) = \int_{\sqrt{x}}^{x^2} t\sqrt{t^2+1} dt$ ,  $y' = ?$
- (e)  $y(x) = \int_0^{\sin x} \sqrt{1-t^2} dt$ ,  $y'' = ?$
- (f)  $y(x) = \int_{\sin x}^{\cos x} \frac{1}{1-t^2} dt$ ,  $y' = ?$

8.  $F(t) = \int_0^t \cos(x^2) dx$  ise,  $\frac{d}{dx} F(\sqrt{x}) = ?$

9.  $H(x) = 3x \int_4^{x^3+1} e^{-\sqrt{t}} dt$  ise,  $H'(2)$  değerini hesaplayınız.

10.  $G(x) = \int_0^{x^2} e^{-t^2} dt$  ise,  $G(x)$  fonksiyonunun artan olduğu aralıkları bulunuz.  $G(x)$  fonksiyonunun tersi var mıdır? Var ise ters fonksiyonun türevini bulunuz.

11.  $\int_0^{x^2} f(t) dt = x \cos(\pi x)$  ise  $f(4) = ?$

12.  $x > 1$  için  $x^2 = 1 + \int_1^x \sqrt{1 + [f(t)]^2} dt$  olacak şekilde bir  $f$  fonksiyonu bulunuz.

13. Her  $x$  değeri için  $f(x) = f(x + w)$  ve  $f$  sürekli olsun.  $g(x) = \int_x^{x+w} f(t) dt$  şeklinde tanımlanan fonksiyonun sabit olduğunu gösterin.

14.  $\int_{a+c}^{b+c} F(x-c)dx = \int_a^b F(x)dx$  eşitliğini gösteriniz.

15. Aşağıdaki integralleri hesaplayın.

(a)  $\int_0^4 [\sin(x-2)]^{1/3} dx$

(b)  $\int_0^1 (1-2x)^3 dx$

(c)  $\int_9^4 \frac{1-\sqrt{u}}{\sqrt{u}} du$

(d)  $\int_{-4}^4 |x| dx$

(e)  $\int_2^{-2} |1-x| dx$

(f)  $\int_5^0 (2-|x|) dx$

(g)  $\int_6^0 |5-|2x|| dx$

(h)  $\int_0^{\pi/4} \sin^2(4x - \frac{\pi}{4}) dx$

16. Analizin temel teoremine göre aşağıdaki hesapta

$$\int_{-1}^1 \frac{dx}{x^2} = -\frac{1}{x} \Big|_{-1}^1 = -2$$

sonucuna ulaşılmaktadır. Bu ise  $1/x^2$ 'nin her zaman pozitif olmasıyla açıkça çelişir. Burada yanlış nerededir?

17.  $f(x) = f(a-x)$  ise

$$\int_0^a f(x) dx = 2 \int_0^{a/2} f(x) dx \text{ and } 2 \int_0^a x f(x) dx = a \int_0^a f(x) dx$$

olduğunu gösteriniz.

18.  $f(x) = f(a-x)$  ise,  $2 \int_0^a x f(x) dx = a \int_0^a f(x) dx$  olduğunu gösteriniz.

19. Her  $a$  ve  $b$  pozitif tamsayısı için  $\int_{t=a}^{ab} \frac{1}{t} dt = \int_{t=1}^b \frac{1}{t} dt$  olduğunu gösteriniz (Yol gösterme:  $t = au$ )

20.  $\int_0^{\sin^2 x} \sin^{-1} \sqrt{t} dt + \int_0^{\cos^2 x} \cos^{-1} \sqrt{t} dt = \text{sabit}$  olduğunu gösteriniz ( $\sin x, \cos x \geq 0$ ).

21.  $\int_{1/2}^2 \frac{1}{x} \sin\left(x - \frac{1}{x}\right) dx = 0$  olduğunu gösteriniz (Yol gösterme:  $x = \frac{1}{t}$ ).

22.  $\int_0^\pi x f(\sin x) dx = \frac{\pi}{2} \int_0^\pi f(\sin x) dx$  olduğunu gösteriniz (Yol gösterme:  $x = \pi - t$ ).
23. İntegral hesabı yapmadan integral özelliklerini kullanarak aşağıdaki eşitsizliklerin doğruluğunu gösteriniz.
- (a)  $\int_0^1 \frac{1}{x^{17} + 1} dx \geq \frac{\pi}{4}$
- (b)  $\frac{\pi}{2} \leq \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 + \frac{1}{2} \sin^2 x} dx \leq \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{3}{2}}$
- (c)  $\frac{\pi}{8} \leq \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{1 + \cos^2 x} dx \leq \frac{\pi}{6}$
- (d)  $1 \leq \int_0^1 \sqrt{1 + x^2} dx \leq \int_0^1 \sqrt{1 + x} dx$
- (e)  $\int_0^1 \frac{1}{1 + \sqrt{x}} dx \leq \int_0^1 \frac{1}{1 + x^2} dx$
24.  $x > 0$  için  $\int_0^{x^2} f(t) dt = x \cos(\pi x)$  ise  $f(4)$ 'ü bulunuz.
25.  $a$  ve  $b$ 'nin hangi değerleri için  $\int_a^b (4x^2 - x^4) dx$  integrali en büyük değerini alır?
26. Birinci bölgede  $y = \cos x$ ,  $y = \sin x$  eğrileri ve  $y$ -ekseni arasında kalan  $R$  bölgesinin alanını hesaplayın.
27.  $y = x^2$ ,  $y = -x^2 + 2$  eğrileri ve  $x$ -ekseni arasında kalan  $R$  bölgesinin alanını hesaplayınız.
28.  $y = \frac{x^2}{2} + 4$  ve  $y = |x^2 - 4|$  eğrileri arasında kalan  $R$  bölgesinin alanını hesaplayınız.
29.  $x = 8 - y^2$  ve  $x = y^2 - 8$  fonksiyonlarının grafikleri arasında kalan  $R$  bölgesinin alanını hesaplayınız.
30. Alttan  $x^2 + y^2 = a^2$  çemberi ve üstten  $y = b$  ( $-a \leq b \leq a$ ) doğrusu ile sınırlı bölgenin alanını bulunuz.
31.  $x = y^2$  ve  $x = 2y^2 - y - 2$  eğrileri ile sınırlı bölgenin alanını  $y$ 'ye göre integrasyon yaparak hesaplayınız.
32.  $y = x^3$  eğrisi ve bu eğrinin  $(1, 1)$  noktasındaki teğet doğrusu tarafından sınırlanan sonlu düzlem bölgesinin alanını hesaplayınız. (Yol gösterme: Teğet doğrusunun eğriyi kestiği noktayı bulunuz. )
33. Aşağıdaki eğriler tarafından sınırlanan bölgelerin alanlarını hesaplayınız.
- (a)  $y = x^4 - 2x^2 + 1$ ,  $y = x^2 - 1$
- (b)  $x + 1 = (y - 1)^2$ ,  $(y - 1)^2 = 1 - x$
- (c)  $y = \frac{1}{2} \sec^2 t$ ,  $y = -4 \sin^2 t$ ,  $t = \mp \frac{\pi}{3}$

34.  $x = 3y^2$  ve  $x = 12y - y^2 - 5$  eğrileri tarafından sınırlanan bölgenin  $R$  bölgesinin alanını hesaplayın.
35.  $y = x^2$  ve  $y = k - x^2$  eğrileri tarafından sınırlanan alanı 72 yapan  $k > 0$  sayısını bulunuz.
36.  $y = k$  doğrusu  $y = 100 - x^2$  parabolü ve  $x$  eksenini arasında kalan alanı iki eşit parçaya bölecek şekilde  $k > 0$  sayısını bulunuz.
37.  $A$  ve  $B$ ,  $y = x^2$  parabolü ve  $y = x + 2$  doğrusunun kesim noktaları,  $C$  ise parabol üzerinde  $y = x + 2$  doğrusuna paralel teğet doğrusunun bulunduğu nokta olsun. Doğru tarafından parabolün iç bölgesinden kesilen parçanın alanının  $ABC$  üçgeninin alanının  $\frac{4}{3}$  katı olduğunu gösteriniz.