

2011-2012 GÜZ DÖNEMİ MAT101 MATEMATİK I
Çalışma Soruları-2

Konu: Türev ve Türevin Uygulamaları

1. Tanımı kullanarak $f(x) = 1/\sqrt[3]{x+1}$ fonksiyonunun $f'(-2)$ ve $f'(1)$ türevlerini bulunuz.

2. (a) $f(x) = \begin{cases} 3x, & x < 0 \\ -(2-x)^2, & 0 \leq x \leq 2 \\ x^2 - 4, & x > 2. \end{cases}$ fonksiyonunun grafiğini çiziniz.

(b) f fonksiyonu $x = 0$ ve $x = 2$ noktalarında sürekli midir?

(c) f fonksiyonu $x = 0$ ve $x = 2$ noktalarında türevli midir?

Cevaplarınız açıklayınız.

3. $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin(1/|x|), & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$ fonksiyonu $x = 0$ 'de türevli midir? Türev tanımı kullanarak cevabınızı açıklayınız.

4. $f(x) = \begin{cases} (|x|)^3 & x < 1 \\ \sqrt{x} & x \geq 1. \end{cases}$ fonksiyonu veriliyor.

(a) f fonksiyonu $x = 0$ ve $x = 1$ noktalarında sürekli midir?

(b) f fonksiyonu $x = 0$ ve $x = 1$ noktalarında türevli midir?

Cevaplarınız açıklayınız.

5. (a) $f(x)$, $-\pi/2 \leq x \leq \pi/2$ aralığında $|f(x)| \leq 1 - \cos x$ koşulunu sağlayan bir fonksiyon olsun. $f(x)$ fonksiyonunun $x = 0$ 'da türevlenebilir olduğunu gösteriniz ve $f'(0)$ değerini bulunuz.

(b) (a) şikkından yararlanarak,

$$f(x) = \begin{cases} (1 - \cos x) \cos(1/x) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

fonksiyonunun $f'(0)$ türevini hesaplayınız.

6. a ve b 'nin hangi değerleri için $f(x) = \begin{cases} ax + b, & x \leq -1 \\ ax^3 + x + 2b, & x > -1 \end{cases}$ fonksiyonu her x değerinde türevli olur ?

7. Aşağıdaki fonksiyonların birinci ve ikinci mertebeden türevlerini bulunuz.

(a) $y = x^9 + \sqrt{9x} - \frac{1}{\pi + 1}$

(d) $y = 2 \tan^2 x - \sec^2 x$

(b) $y = (x^2 + 3)(x - 2 + \frac{1}{2x})$

(e) $y = 4 \cos(\sqrt{x})$,

(c) $y = \left(\frac{1 - \sqrt{x}}{1 + \sqrt{x}} \right)^4$

(f) $y = 5 \cot(x^2 + 2)$

(g) $y = x^{-3} \csc(2x)^2$

8. Aşağıdaki fonksiyonların türevlerini bulunuz.

(a) $y(x) = \frac{\sqrt{x}}{1 + \sqrt{x}} + \left(\frac{x}{5} + \frac{1}{5x}\right)^5 + (\sec x + \tan x)^5$.

(b) $y(x) = \sin(x + \sqrt{x+1}) + \left(\frac{1-x^3}{2x^2+5}\right)^2$

(c) $y = \left(\frac{\sin x}{1 + \cos x}\right)^2 - \frac{\sin x}{1 - \cos x}$

9. $y = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 20$ eğrisi üzerinde teğet doğrusunun

(a) $y = 1 - \frac{x}{24}$ doğrusuna dik olduğu

(b) $y = \sqrt{2} - 12x$ doğrusuna paralel olduğu noktaları bulunuz.

10. $x^2 - y^2 = 1$ fonksiyonunu kapalı formda türeterek, aşağıdaki eşitlikleri gösteriniz.

(a) $dy/dx = x/y$.

(b) $d^2y/dx^2 = -1/y^3$.

11. Kapalı türevi kullanarak dy/dx türevini hesaplayınız.

(a) $x^2y + xy + xy^2 = 7$

(b) $x + \sin y = xy$

(c) $y^2 = \frac{x-1}{x+1}$

12. $y^3 + y = 2 \sin x$ ise $(0, 0)$ noktasında d^2y/dx^2 türevinin değerini hesaplayınız.

13. y değişkeni x 'in bir fonksiyonu olmak üzere $(x^2 + 1)y + \frac{1}{\pi} \sin(\pi(y + \sqrt{x})) = 2$ eğrisinin $(1, 1)$ noktasındaki normal doğrusunun denklemini yazınız.

14. Aşağıdaki eğrilerin t 'nin verilen değeri için teğet doğrularının denklemini yazınız. Ayrıca aynı noktada $\frac{d^2y}{dx^2}$ türevini hesaplayınız.

(a) $x = -\sqrt{3t+2}$, $y = \sqrt{t}$ $t = 2$

(b) $x = t - \sin t$, $y = 1 - \cos t$ $t = \pi/3$

15. $x \sin t + \sqrt{x} = t$ ve $t \sin t - 2t = y$ denklemlerin x ve y 'yi kapalı şekilde $x = f(t)$ ve $y = g(t)$ diferansiyellenebilir fonksiyonları olarak tanımladığımızı varsayarak, $x = f(t)$, $y = g(t)$ eğrisinin $t = \pi$ değerindeki teğet doğrusunun eğimini bulunuz.

16. a, b ve c nin hangi değerleri için

$$f(x) = \begin{cases} ax^2 + bx , & 0 \leq x \leq 1 \\ x - 2 + c , & 1 < x \leq 2 \end{cases}$$

fonksiyonu $[0, 2]$ aralığında Rolle Teoreminin şartlarını sağlar? Daha sonra teoremin sonucunu sağlayan sayıyı bulunuz.

17. Bütün $x > 0$ için $x - \frac{x^3}{6} < \sin x$ eşitsizliğini ispatlayınız.

18. Ortalama değer teoremini kullanarak $(-\pi/2, \pi/2)$ aralığında $|\tan x| \geq |x|$ eşitsizliğini ispatlayınız.

19. Ortalama değer teoremini kullanarak $(0, 1)$ aralığında $x < \sin^{-1} x < \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ eşitsizliğini ispatlayınız. **İpucu:** $\frac{d}{dx}(\sin^{-1} x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, |x| < 1$

20. $f(x) = x^4 + 3x + 1$ fonksiyonunun $[-2, -1]$ aralığında bir tek kökü olduğunu gösteriniz.

21. $f(x)$ fonksiyonu her real sayı için türevlenebilir ve $f(0) = 2, f'(x) \leq -2$ ise $f(-1)$ alabileceği en küçük değer nedir?

22. $f(x)$ fonksiyonu $[-1, 1]$ aralığında $|f'(x)| < \sqrt{1-x^2}$ ise her x_1 ve x_2 reel sayıları için

$$|f(x_1) - f(x_2)| < |x_1 - x_2|$$

olduğunu gösteriniz.

23. Aşağıdaki fonksiyonlar verilen aralıklarda Ortalama Değer Teoreminin şartlarını sağlar mı? Eğer sağlarsa teoremdeki c sayısının alabileceği değerleri bulunuz.

(a) $f(x) = \sqrt{x-x^2}, [0, 1]$ (c) $f(x) = x^{\frac{4}{5}}, [-1, 1]$

(b) $y = \tan \sqrt[3]{x}, [-\pi^3/4^3, \pi^3/4^3]$

24. Aşağıdaki fonksiyonların verilen aralıklarda mutlak maksimum ve mutlak minimum değerlerini bulunuz.

(a) $f(x) = (x-1)^2 - |x^2-1| + 3, [-3, 1].$

(b) $f(x) = 2 \cos x + \sin 2x, [0, \pi/2]$

(c) $f(x) = x + \cot(x/2), [\pi/4, 7\pi/4]$

25. Aşağıdaki fonksiyonların verilen aralıklarda varsa, yerel ve mutlak ekstremum noktalarını ve varsa, büküm noktalarını bulunuz.

(a) $y = x^5 - 2x^3 + x$

(b) $y = x^{2/3}(x^2 - 4)$

26. Aşağıdaki tüm koşulları sağlayan fonksiyonun grafiğini çizin.

$$f'(x) > 0 \text{ eğer } |x| < 2, \quad f'(x) < 0 \text{ eğer } |x| > 2$$
$$f'(-2) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow 2} |f'(x)| = \infty, \quad f''(x) > 0 \text{ eğer } x \neq 2$$

27. $f(x) = x\sqrt{4-x^2} + 2$ fonksiyonu verilsin.

(a) Fonksiyonun tanım kümesini bulunuz.

(b) Fonksiyonun artan ve azalan olduğu aralıkları bulunuz.

(c) Varsa fonksiyonun yerel ekstremumlarını belirleyiniz.

(d) Yerel ekstremumlardan hangilerinin mutlak olduğunu söyleyiniz.

(e) $y = f(x)$ grafiğini çiziniz.

28. Aşağıdaki fonksiyonların grafiklerini çiziniz.

$$(a) y = \sqrt{x^2 + 1} - x$$

$$(b) y = \frac{x^2}{(x-2)^2}$$

$$(c) y = \frac{x^2 - 3}{x - 2}$$

$$(d) y = \frac{1}{x^2 + 1}$$