

2011-2012 GÜZ DÖNEMİ MAT101 MATEMATİK I
Çalışma Soruları-1

Content: Önbilgiler, Limit ve Süreklilik

1. Aşağıdaki noktalardan geçen doğrunun denklemini yazınız.
(a) $(-3, 1)$ ve $(-8, 1)$ (b) $(1, 5)$ ve $(-1, -1)$ (c) $(1, -1)$ ve $(1, 0)$
2. Aşağıda bir noktası ve eğimi verilen doğrunun denklemini yazınız.
(a) $(-3, 3)$, $m = -1$ (b) $(3, -1)$, $m = 0$ (c) $(-5, 6)$ ve eğim yok.
3. x-kesişimi 5 ve y-kesişimi -1 olan doğrunun denklemini yazınız.
4. $2x + cy = 4$ ve $5x + y = 1$ doğruları birbirine (i) paralel, (ii) dik olması için c hangi değerleri alır.
5. Aşağıdaki fonksiyonların tanım ve değer kümelerini bulunuz.
(a) $f(x) = 2^{\sqrt{1-x^2}}$ (b) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2-4}}$ (c) $f(x) = \ln(1 - |1-x|)$
(d) $f(x) = \cos^{-1}(\ln x)$ (e) $f(x) = \frac{1}{\ln^2(x+1)}$ (f) $f(x) = 1 + \sin(x + \pi)$
6. Aşağıdaki fonksiyonların tanımlı oldukları aralıkta tek, çift ya da ne tek ne çift fonksiyon olduklarını belirleyiniz?
(a) $f(x) = \frac{\sin^{-1} x}{x^2 - 1}$ (b) $f(x) = x \sin x - \sec x$ (c) $f(x) = e^x \ln(2|x|)$
7. f çift g ise tek fonksiyon olsun, ve her ikisi f ve g tüm reel ekseninde tanımlı olsun. Aşağıdaki fonksiyonlardan hangisi (tanımlı oldukları bölgede) tek ya da çifttir?
(a) $f^2 = ff$ (b) g/f (c) gog (d) gof
8. Kaydırma ve öteleme uygulayarak aşağıdaki fonksiyonların grafiğini çiziniz.
(a) $y = |x^3|$ (b) $y = \cos(x + \frac{\pi}{2}) - 1$ (c) $y = \frac{-1}{x+3}$ (d) $y = 1 - e^{x+1}$
(e) $y = 2 + \ln(x+2)$ (f) $y = \sin^{-1}(x+1) + \frac{\pi}{2}$
9. f^{-1} 'i bulunuz ve $(f \circ f^{-1})(x) = (f^{-1} \circ f)(x) = x$ eşitliğinin sağlandığını kontrol ediniz.
(a) $f(x) = -(x-2)^2$, $x \geq 2$ (b) $y = \frac{2x+1}{x+3}$ (c) $y = \sqrt{x-1} + 2$
10. Aşağıdaki denklemleri çözünüz.
(a) $e^x + e^{-x} = 4$ (b) $2 \ln(x-1) - \ln 2 = \ln(x+3)$
11. Aşağıdaki nicelikleri $\sin x$ ve $\cos x$ cisinden yazınız.
(a) $\cos(\frac{3\pi}{4} \mp x)$ (b) $\sin(\pi \mp x)$ (c) $\tan(\frac{11\pi}{6} \mp x)$

12. Aşağıdaki ifadelere karşı gelen açılar bulunuz.

(a) $\sin^{-1} \frac{1}{2}$, $\sin^{-1}(-\frac{1}{2})$ (b) $\cos^{-1} \frac{1}{\sqrt{2}}$, $\cos^{-1}(-\frac{1}{\sqrt{2}})$ (c) $\tan^{-1}(-\sqrt{3})$, $\tan^{-1}(\frac{1}{\sqrt{3}})$

13. Aşağıdaki özdeşlikleri ispat ediniz.

(a) $\cos^{-1} x + \sin^{-1} x = \pi/2$ (b) $\cot^{-1} \frac{1}{x} - \tan^{-1} x = \pi$, $x < 0$

14. Parçacığın hareketini, uygun bir Kartezyen denklem bularak belirleyiniz. Kartezyen denklemin grafiğini çiziniz.

(a) $x = -\sec t$, $y = \tan t$, $-\pi/2 < t < \pi/2$

(b) $x = 4 \sin t$, $y = 4 \cos t$, $0 \leq t \leq 2\pi/3$

(c) $x = \cos(e^t)$, $y = 2 \sin(e^t)$, $-\infty < t < \infty$

(d) $x = -\sqrt{t}$, $y = t$, $0 \leq t < \infty$

(e) $x = 2t + 3$, $y = t^2 - 1$, $-2 \leq t \leq 2$

15. Aşağıdaki doğru ve eğriler için bir parametrisasyon bulunuz.

(a) $(-1, 3)$ ve $(2, 3)$ noktaları arasında kalan doğru parçası,

(b) $x - 1 = y^2$ parabolünün üst yarısı,

(c) Başlangıç noktası $(-1, 2)$ olan ve $(0, 0)$ noktasından geçen ışın.

16. $\epsilon - \delta$ tanımını kullanarak aşağıdaki limitlerin doğruluğunu ispatlayınız.

(a) $\lim_{x \rightarrow -4} \sqrt{1 - 2x} = 3$ (b) $\lim_{x \rightarrow \sqrt{2}} \frac{1}{x^2} = \frac{1}{2}$ (c) $\lim_{x \rightarrow -1} (x^2 - 1) = 0$

17. Aşağıdaki limitlerde, verilen ϵ değerine karşı gelen uygun δ değerini bulunuz.

(a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - x}{2x + 1} = 1$, $\epsilon = 1$ (b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x - 1} = -1$, $\epsilon = 0.5$

18. Aşağıdaki limitler mevcut ise bulunuz, mevcut değil ise sebebini açıklayınız.

(a) $\lim_{x \rightarrow 64} \frac{\sqrt{x} - 8}{\sqrt[3]{x} - 4}$ (b) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 - \sqrt{x}}{1 - x}$ (c) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 + x^2} - \sqrt{1 + x}}{x}$

(d) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{3 - x}{\sqrt{4 - x} - \sqrt{x/3}}$ (e) $\lim_{x \rightarrow 27} \frac{\sqrt{x} - 3\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x} - 3}$ (f) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{x+1} - 1}{\sqrt[4]{x+1} - 1}$

(g) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{2+x} - \frac{1}{2}$ (h) $\lim_{x \rightarrow 0} x \sin \frac{1}{x}$ (i) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 3x}{5x^2}$

(j) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\tan 3x}$ (k) $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin x}{x - \pi}$ (l) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x}{x(1 - \cos x)}$

(m) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + \sin x - \cos x}{1 - \sin x - \cos x}$ (n) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 + \tan x} - \sqrt{1 + \sin x}}{x^3}$ (o) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan^{-1} x}{x}$

(p) $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos h - 1}{h}$ (q) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x}{\sin x}$ (r) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x + \sin x + 2\sqrt{x}}{x + \sin x}$

$$\begin{array}{lll}
\text{(s)} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x + \sin x}{x + \cos x} & \text{(t)} \lim_{x \rightarrow (-\pi/2)^+} \sec x & \text{(u)} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x} + x}{\sqrt{x} + \cos x} \\
\text{(v)} \lim_{x \rightarrow \infty} e^x \sin(e^{-x}) & \text{(w)} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 2}{x - 5} & \text{(x)} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 - 4x + 8}{3x^3} \\
\text{(y)} \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + 1} - \sqrt{x^2 - 1}) & & \text{(z)} \lim_{x \rightarrow \infty} x(\sqrt{9x^2 + 1} - 3x)
\end{array}$$

19. Aşağıdaki fonksiyonların asimptotlarını bulunuz.

$$\text{(a)} f(x) = \frac{x^3}{4 - x^2} \quad \text{(b)} f(x) = \frac{x^2 - 9}{x(x + 3)} \quad \text{(c)} f(x) = \frac{2x^2 + 1}{x^2 - 2x}$$

20. $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = -1$ ise, $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin(1 + f(x))}{f^3(x) + 1}$ değerini bulunuz.

21. Aşağıdaki fonksiyonların verilen noktadaki sağdan ve soldan limitlerini bulunuz.

$$\begin{array}{ll}
\text{(a)} y = \frac{|x - 1|}{x - 1} + x^2 \quad (x = 1) & \text{(b)} y = \frac{x}{x^2 - 1} + x^2 \quad (x = \mp 1) \\
\text{(c)} y = \frac{1}{x^{4/3}} - \frac{1}{(x - 2)^{1/3}} \quad (x = 0, 2) & \text{(d)} y = \frac{2 + x}{1 + 2^{1/x}} \quad (x = 0) \\
\text{(e)} y = \tan^{-1} \frac{x}{x - 2} \quad (x = 2) & \text{(f)} y = \frac{\sqrt{1 - \cos 2x}}{\sqrt{2x}} \quad (x = 0) \\
\text{(g)} f(x) = \begin{cases} \frac{1 - \cos(x - 1)}{(x - 1)^2} & x \neq 1 \\ 1 & x = 1 \end{cases} \quad (x = 1)
\end{array}$$

22. Aşağıdaki fonksiyonlar hangi noktalarda süreksizdir? Varsa, süreksizlik cinslerini sıralayınız.

$$\text{(a)} f(x) = \frac{1}{1 - 3^{\frac{3-x}{x}}} \quad \text{(b)} f(x) = \frac{x^2 + 1}{x^2 - 4x + 3} \quad \text{(c)} f(x) = \frac{1}{x^2 + 1}$$

$$\text{(d)} y = \begin{cases} 1 - x^2 & |x| \leq 1 \\ \frac{1}{|x|} & |x| > 1 \end{cases} \quad (x = -1) \quad \text{(f)} f(x) = \begin{cases} x + 3 & -3 \leq x < -1 \\ -1 & x = -1 \\ -x + 1 & -1 < x \leq 1 \\ \frac{1}{x - 1} & 1 < x \leq 2 \\ x & x > 2 \end{cases}$$

23. $f(x) = \sqrt{x} \sin \frac{1}{x}$ fonksiyonunun $x = 0$ noktasında sürekli olabilmesi için $f(0)$ ne olmalıdır.

24. $f(x) = \begin{cases} a \sin^{-1} \frac{x}{2} & 0 \leq x \leq 2 \\ 3 \tan^{-1} \frac{1}{x - 2} & x > 2 \end{cases}$ fonksiyonunun her x değerinde sürekli olabilmesi için a 'nın değeri ne olmalıdır?

25. $f(x) = \cos x + \sin x - x$ fonksiyonunun en az bir kökü olduğunu gösteriniz.

26. f fonksiyonunun $[0, \pi/2]$ kapalı aralığında sürekli ve her $x \in [0, \pi/2]$ için $0 < f(x) < 1$ olduğunu varsayalım. $f(c) = \sin(c)$ olacak şekilde bir $c \in [0, \pi/2]$ bulunabileceğini gösteriniz.